PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5. 1. März 1920. Redaktionsschluß für No. 7 am 15 März 1920. 21. Jahrgang.

INHALT:

M. Siegbahn, J. R. Rydberg †. S. 113.

Originalmitteilungen:

A. Landé, Störungstheorie des Heliumatoms. S. 114.

E. Waetzmann, Theoretisches über den Schalldruck. S. 122.

H. Haga, Eine Verbesserung der Zehnderschen Hochspannungsakkumulatoren. S. 128.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

R. Ruer, Metallographie. (Schluß.) S. 129.

Personalien. S. 136.

J. R. Rydberg †.

Von Manne Siegbahn.

In den letzten Dezembertagen verschied nach einem längeren Krankenlager Professor J. R. Rydberg. Kaum einen Monat früher hatte er sich dem schwedischen Gesetze gemäß an seinem 65. Geburtstage von seinem Lehramt an der Universität Lund zurückgezogen. Wenn auch die wissenschaftliche Tätigkeit Rydbergs schon längst abgeschlossen war, so stehen doch seine wichtigsten Arbeiten eben jetzt im Brennpunkt des Interesses. Durch die geniale und glückliche Idee Bohrs ist die Physik dazu gekommen, das umfangreiche spektroskopische Material in tieferem Sinne zu verwerten. Die bahnbrechenden Arbeiten von Rydberg, besonders seine: „Recherches sur la Constitution des Spectres d'Emission des Eléments Chimiques" in Kongl. Sv. Vetenskaps akad. Handl. Bd. 23, Nr. 11, 1889 haben den Weg zur Klärung der Geheimnisse des Atoms geebnet. Dieses Ziel und dessen große Bedeutung war stets für ihn der Ansporn bei seiner Verfolgung der spektroskopischen Gesetzmäßigkeiten.

Einen anderen Weg, dasselbe Ziel zu gewinnen, glaubte Rydberg durch Untersuchung des Zusammenhanges verschiedener physikalischer und chemischer Eigenschaften mit dem periodischen System der Elemente zu finden. Die in dieser Richtung begonnenen hoffnungsvollen Arbeiten wurden durch die Krankheit Rydbergs, noch ehe sie zum Abschluß gelangt waren, abgebrochen. Auch hat ja die theoretische Physik in ihrer gewaltigen Entwicklung während der letzten Jahre ganz andere Wege bei der Behandlung dieser Fragen eingeschlagen, welche, wie es scheint, ein weit tiefergehendes Verständnis zu erreichen gestatten. Eine Reihe von Rydberg bei seinen diesbezüglichen Untersuchungen gefundenen Gesetzmäßigkeiten werden trotzdem sicherlich von Nutzen sein. Seine letzte Arbeit auf diesem Gebiete, die noch, nachdem die Krankheit ihn schon ergriffen hatte, geschrieben ist, findet sich im Journal de Physique 1914 unter dem Titel: „Recherches sur le système des éléments".

Ein näheres Eingehen auf die physikalischen Arbeiten Rydbergs dürfte nicht nötig sein, da sie schon Allgemeingut der Physik sind. Über den äußeren Verlauf des Lebens von Rydberg sei folgendes erwähnt: Geboren in Halmstad (Schweden) 1854, absolvierte er das dortige Gymnasium 1873 und wurde im selben Jahre an der Universität Lund immatrikuliert. Promoviert zum Dr. phil. in Mathematik im Jahre 1879, war er von 1880 bis 1882 Privatdozent in diesem Fache, bis er sich 1882 als Privatdozent für Physik habilitierte. Zum Professor für Physik in Lund wurde er 1901 ernannt. Von Auszeichnungen, die ihm zuteil wurden, sei erwähnt die Berufung zum Mitglied der „Royal Society" im Jahre 1919.

(Eingegangen 14. Januar 1920.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Störungstheorie des Heliumatoms.

(Auszug aus der Frankfurter Habilitationsschrift.)

Von A. Landé.

In einer vorläufigen Mitteilung[1]) in dieser Zeitschrift zeigte Verf., daß eine konsequente Anwendung der Quantentheorie auf die komplanaren und geneigten Kreis- und Ellipsenbahnen zweier Elektronen $-\varepsilon$ um einen Kern $+2\varepsilon$ Aussicht hat, das Serienspektrum des Heliums zu erklären. Im folgenden soll deshalb die exakte Störungstheorie und Quantelung des Heliumatoms ausgeführt werden. Die früheren Überschlagsrechnungen werden dabei teils bestätigt, teils berichtigt. Der Fortschritt gegen früher besteht in konsequenter Berücksichtigung der Bahnstörungen und einer neuen Quantelung der Bahnneigungen, welche nur zwei Seriensysteme (He_{I} und He_{II}) zuläßt, im Gegensatz zu der früher erhaltenen Vielfachheit.

§ 1. Wir wollen zunächst nur diejenigen Zustände des Atoms betrachten, bei denen beide Elektronen in einer Ebene im gleichen Drehsinn um den Kern $+2\varepsilon$ laufen[2]). Ihre Lagen sind dann bestimmt durch Polarkoordinaten r, φ (inneres) R, Φ (äußeres Elektron). Ihr gegenseitiger Abstand

$$\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \Phi)} = \varrho$$

hängt nur von dem Winkelunterschied

$$\gamma = \varphi - \Phi \qquad (1)$$

ab. Die gegenseitige potentielle Energie ε^2/ϱ der beiden Elektronen ist in die nach Potenzen von r/R fortschreitende Reihe entwickelbar

$$\frac{\varepsilon^2}{\varrho} = \frac{\varepsilon^2}{R}\left(1 + \frac{r}{R}\cos\gamma + \frac{r^2}{R^2}\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right) \qquad (1')$$

Daher wird die gesamte potentielle Energie des Systems mit dem Kern gleich

$$V = -\frac{2\varepsilon^2}{r} - \frac{\varepsilon^2}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{r}{R}\cos\gamma + \frac{r^2}{R^2}\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right) \qquad (2)$$

und die gesamte kinetische Energie, bei Vernachlässigung der Elektronenmassen gegen die Kernmasse gleich

$$T = \frac{\mu}{2}\left[r^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{R}^2 + R^2\dot{\Phi}^2\right]. \qquad (2')$$

Die Lagrangeschen Gleichungen für eine Koordinate q

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

auf die vier Koordinaten r, φ, R, Φ angewandt, führen zu den vier Bewegungsgleichungen:

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\varphi}^2 + \frac{2\varepsilon^2}{r^2} = -\frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(\cos\gamma + \frac{2r}{R}\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right) \qquad (3a)$$

$$2\mu\dot{r}\dot{\varphi} + \mu r\ddot{\varphi} = -\frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\varphi} + \frac{3}{2}\frac{r}{R}\frac{\partial\cos^2\gamma}{\partial\varphi} + \cdots\right) \qquad (3b)$$

$$\mu\ddot{R} - \mu R\dot{\Phi}^2 + \frac{\varepsilon^2}{R^2} = \frac{\varepsilon^2}{R}\cdot\frac{r}{R}\left(2\cos\gamma + \frac{3r}{R}\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right) \qquad (3c)$$

$$2\mu R\dot{\Phi} + \mu R\ddot{\Phi} = -\frac{\varepsilon^2}{R}\frac{r}{R}\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\Phi} + \frac{3r}{2R}\frac{\partial\cos^2\gamma}{\partial\Phi} + \cdots\right). \qquad (3d)$$

1) A. Landé, Das Serienspektrum des Heliums, diese Zeitschr. 20, 228, 1919.

2) Komplanare Gegenrotation würde das Vorzeichen der Störungen 1. Ordnung umkehren, entgegen der Beobachtung.

Wären keine gegenseitigen Bahnstörungen vorhanden, so würden die beiden Elektronen gewisse ungestörte, in der Astronomie als intermediär bezeichnete Bahnen beschreiben. Die wirklichen Bahnen sind dann als Störungen solcher intermediären Bahnen zu behandeln.

Die Verhältnisse weichen hier insofern von den astronomischen ab, als der Kern zwar wegen seiner überwiegenden Masse als ruhend betrachtet werden darf, aber seine Kraft auf die Planeten dieselbe Größenordnung wie die gegenseitigen Störungskräfte der Planeten unter sich besitzt.

Als intermediäre Bahnen nehmen wir hier reine Kreisbahnen

$$\left.\begin{aligned} r &= \mathring{r}, \quad \varphi = \mathring{\omega}\, t, \\ R &= \mathring{R}, \quad \Phi = \mathring{\Omega}\, t \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

an, als Lösungen der Gleichungen (3), wenn deren rechte Seiten gleich Null gesetzt werden. Man erhält dann die intermediären Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \mu\, \mathring{r}\, \mathring{\omega}^2 &= 2\,\varepsilon^2/\mathring{r}^2, \\ \mu\, \mathring{R}\, \mathring{\Omega}^2 &= \varepsilon^2/\mathring{R}^2 \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

und eine kleine Größe $\mathring{\varrho}$

$$\mathring{\varrho} = 2\,\mathring{r}/\mathring{R} = (4\,\mathring{\Omega}/\mathring{\omega})^{1/3}. \tag{4''}$$

Um durch sukzessive Näherung Lösungen $r(t)$, $\varphi(t)$, $R(t)$, $\Phi(t)$ von (3) zu finden, welche als Störungen reiner Kreisbahnen aufzufassen sind, setzen wir $r(t)$ usw. als Fouriersche Reihen nach der Winkeldifferenz $(\omega - \Omega)t$ an:

$$\left.\begin{aligned} r &= r_0 + r_1 \cos(\omega-\Omega)t + r_2 \cos 2(\omega-\Omega)t + \cdots \\ \varphi &= \omega t + \varphi_1 \sin(\omega-\Omega)t + \varphi_2 \sin 2(\omega-\Omega)t + \cdots \\ R &= R_0 + R_1 \cos(\omega-\Omega)t + R_2 \cos 2(\omega-\Omega)t + \cdots \\ \Phi &= \Omega t + \Phi_1 \sin(\omega-\Omega)t + \Phi_2 \sin 2(\omega-\Omega)t + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

deren Koeffizienten $r_0 r_1 r_2$ usw. unten näher bestimmt werden. Da sich die Koeffizienten der Sinusglieder von r und R und der Cosinusglieder von ω und Φ als verschwindend herausstellen würden, sind sie in dem Ansatz (5) gleich fortgelassen. Zur Abkürzung wollen wir zuweilen statt (5) schreiben

$$\left.\begin{aligned} r &= r_0 + \bar{r} + \bar{\bar{r}} + \cdots, \\ R &= R_0 + \bar{R} + \bar{\bar{R}} + \cdots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}} + \cdots, \\ \Phi &= \Phi_0 + \bar{\Phi} + \bar{\bar{\Phi}} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

so daß die Größe

$$\gamma = \varphi - \Phi$$

aus (1) die Form

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \bar{\gamma} + \bar{\bar{\gamma}} + \cdots \\ &\text{mit} \\ \gamma_0 &= (\omega - \Omega)\, t, \\ \bar{\gamma} &= (\varphi_1 - \Phi_1) \sin \gamma_0, \end{aligned}\right\} \tag{5''}$$

usw. erhält. Die auf der rechten Seite von (3) vorkommenden Größen haben daher die Entwicklungen (6) (6')

$$\cos\gamma = \cos\gamma_0 - \bar{\gamma}\sin\gamma_0$$

$$\frac{\partial \cos\gamma}{\partial \varphi} = -\sin\gamma = -\sin\gamma_0 - \bar{\gamma}\cos\gamma_0 = -\frac{\partial \cos\gamma}{\partial \Phi}$$

$$\cos^2\gamma = \frac{1+\cos 2\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\gamma_0 - 2\bar{\gamma}\sin 2\gamma_0)$$

$$\frac{\partial \cos^2\gamma}{\partial \varphi} = -\sin 2\gamma = -\sin 2\gamma_0 - 2\bar{\gamma}\cos 2\gamma_0 = -\frac{\partial \cos^2\gamma}{\partial \Phi} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2}\left(1 - \frac{2\bar{r}}{r_0} + 3\left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right)^2 - 2\frac{\bar{r}}{r_0}\right) \\ &\text{mit} \quad \bar{r} = r_1 \cos\gamma_0, \quad r = r_2 \cos 2\gamma_0 \\ &\frac{1}{R^2} = \text{entsprechend.} \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

Die Größen $r_0 R_0 \omega \Omega$ in (5) sind übrigens verschieden von den intermediären Werten $\mathring{r}\,\mathring{R}\,\mathring{\omega}\,\mathring{\Omega}$ aus (4), (4'), (4''). Bedeutet aber $[\varrho^n]$ eine Größe $n$ter Ordnung in der kleinen Größe ϱ (4''), so wird statt (4') (4'')

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\,\varepsilon^2}{r_0^2} &= \mu\, r_0\, \omega^2 (1 + [\varrho_0{}^n]), \\ \frac{\varepsilon^2}{R^2} &= \mu\, R_0\, \Omega^2 (1 + [\varrho_0{}^n]) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\varrho_0 = \frac{2\,r_0}{R_0} = \left(\frac{4\,\Omega}{\omega}\right)^{1/3}(1 + [\varrho_0{}^n]) = \mathring{\varrho}\,(1 + [\varrho_0{}^n]) \tag{7'}$$

worin der Exponent n sich unten (Gl. 15) zu $n = 4/3$ herausstellen wird.

Nach der klein anzunehmenden Größe

$$\varrho_0 = (2\,r_0/R_0)^{1/3}$$

sollen im folgenden die Störungen entwickelt werden.

Wir setzen nun den Ansatz (5), (5') in die Bewegungsgleichungen (3) ein und erhalten bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} &\mu\,[(\ddot{\bar{r}}_0 - r_0\dot{\varphi}_0{}^2) + (\ddot{\bar{r}} - \bar{r}\dot{\varphi}_0{}^2 - 2\,r_0\,\dot{\varphi}_0\dot{\bar{\varphi}}) + \\ &+ (\ddot{\bar{\bar{r}}} - \bar{\bar{r}}\dot{\varphi}_0{}^2 - 2\dot{\varphi}_0\dot{\bar{r}}\dot{\bar{\varphi}} - \bar{r}_0\,\ddot{\bar{\varphi}}^2 - 2\,r_0\,\dot{\varphi}_0\,\dot{\bar{\bar{\varphi}}})] + \\ &+ \frac{2\,\varepsilon^2}{r_0^2}\left[1 - \frac{2\bar{r}}{r_0} + \frac{3\,\bar{r}^2}{r_0^2} - \frac{2\bar{\bar{r}}}{r_0}\right] = \\ &- \frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\left[\cos\gamma_0 - \bar{\gamma}\sin\gamma_0 - 2\frac{\bar{R}}{R_0}\cos\gamma_0 - \right. \\ &\left. - \frac{2\,r_0}{R_0}\,\frac{1+\cos 2\gamma_0}{4}\right] \end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned} &\mu\,[(2\,\dot{\varphi}_0\dot{\bar{r}} + r_0\ddot{\bar{\varphi}}) + (2\dot{\bar{r}}\dot{\bar{\varphi}} + 2\,\dot{\varphi}_0\dot{\bar{r}} + r_0\ddot{\bar{\bar{\varphi}}} + \\ &+ \bar{r}\ddot{\bar{\varphi}})] = -\frac{\varepsilon^2}{R_0{}^2}\left(1 - 2\frac{\bar{R}}{R_0}\right)(-\sin\gamma_0 - \\ &- \bar{\gamma}\cos\gamma_0 - \tfrac{3}{2}\frac{r_0}{R_0}\sin 2\gamma_0) \end{aligned} \tag{8b}$$

$$\mu[(\ddot{R}_0 - R_0\dot{\Phi}_0^2) + (\ddot{R} - \ddot{R}\dot{\Phi}_0^2 - 2R_0\dot{\Phi}_0\dot{\Phi}) + (\ddot{R} - \ddot{R}\dot{\Phi}_0^2 - 2\dot{\Phi}_0\dot{R}\dot{\Phi} - R_0\dot{\Phi}^2 - 2R_0\dot{\Phi}_0\dot{\Phi})] + \frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\left[1 - 2\frac{\bar{R}}{R_0} + 3\frac{\bar{R}^2}{R_0^2} - 2\frac{\bar{R}}{R_0}\right] = + \frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0}\,2\cos\gamma_0 \qquad (8c)$$

$$\mu[(2\dot{\Phi}_0\dot{\bar{R}} + R_0\ddot{\bar{\Phi}}) + (2\dot{\bar{R}}\dot{\bar{\Phi}} + 2\dot{\Phi}_0\ddot{\bar{R}} + R_0\ddot{\bar{\Phi}} + \ddot{R}\dot{\bar{\Phi}})] = -\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0}\sin\gamma_0. \qquad (8d)$$

Hier kann man die zeitlich konstanten Glieder zusammenfassen und für sich gleich Null setzen [s. u. Gl. (12a), (12c)], ebenso die Glieder mit dem Faktor $\cos\gamma_0$ bzw. $\sin\gamma_0$ [Gl. (9)] und die Glieder mit dem Faktor $\cos 2\gamma_0$ bzw. $\sin 2\gamma_0$ [Gl. (16)]. Dabei ist also z. B.

$$\bar{\gamma}\sin\gamma_0 = (\varphi_1 - \Phi_1)\sin^2\gamma_0 = (\varphi_1 - \Phi_1)\frac{1-\cos 2\gamma_0}{2}$$

mit dem Bestandteil $(\varphi_1 - \Phi_1)\frac{1}{2}$ zu den Konstanten, mit dem Bestandteil

$$(\varphi_1 - \Phi_1)\frac{\cos 2\gamma_0}{2}$$

zu den Gliedern mit $\cos 2\gamma_0$ zu schlagen. Da auf der rechten Seite von (8a), (8c) nur konstante und Cosinusglieder stehen bleiben, auf der rechten Seite von (8b), (8d) nur Sinusglieder und keine konstanten Glieder, ist die Fortlassung der Sinus- bzw. Cosinusglieder in dem Ansatz (5) gerechtfertigt; man erhält aus (8a) und (8c) je drei für sich zu erfüllende Gleichungen, aus (8b) und (8d) je zwei, im ganzen zehn simultane Gleichungen zur Bestimmung der zehn unbekannten Fourier-Koeffizienten

$$r_0\, r_1\, r_2\, \varphi_1\, \varphi_2\, R_0\, R_1\, R_2\, \Phi_1\, \Phi_2$$

als Funktionen der frei bleibenden Größen ω und Ω, die erst durch zwei Quantenbedingungen später festgelegt werden.

§ 2. Wir stellen zunächst die vier Gleichungen mit dem gleich Null gesetzten Faktor von $\cos\gamma_0$ bzw. $\sin\gamma_0$ zusammen (9a) bis (9d):

$$\frac{r_1}{r_0}\left(\mu r_0(\omega-\Omega)^2 + \mu r_0\omega^2 + 2\cdot\frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}\right) + \varphi_1\, 2\mu r_0\omega(\omega-\Omega) = +\frac{\varepsilon^2}{R_0^2} \qquad (9a)$$

$$\frac{r_1}{r_0}\cdot 2\mu r_0\omega(\omega-\Omega) + \varphi_1\mu r_0(\omega-\Omega)^2 = -\frac{\varepsilon^2}{R_0^2} \qquad (9b)$$

$$\frac{R_1}{R_0}\left(\mu R_0(\omega-\Omega)^2 + \mu R_0\Omega^2 + 2\cdot\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\right) + \Phi_1\, 2\mu R_0\Omega(\omega-\Omega) = -2\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0} \qquad (9c)$$

$$\frac{R_1}{R_0}\cdot 2\mu R_0\Omega(\omega-\Omega) + \Phi_1\mu R_0(\omega-\Omega)^2 = +\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0} \qquad (9d)$$

(9c), (9d) ergeben mit Benutzung von (7), (7') die Lösungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{R_1}{R_0} &= -\tfrac{1}{16}\varrho_0^4 + \cdots,\\ \Phi_1 &= \tfrac{1}{32}\varrho_0^4\cdots.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Der periodische Teil $R_1\cos\gamma_0$ und $\Phi_1\sin\gamma_0$ von R und Φ ist also von vierter Ordnung verschwindend klein gegen den aperiodischen Teil R_0 und $\Phi_0 = \Omega t$. Die Bahn des äußeren Elektrons ist also auch im gestörten Zustand (nahezu) eine Kreisbahn, freilich mit einem geänderten Radius $R_0 \neq \mathring{R}$ und $\Omega \neq \mathring{\Omega}$. Anders liegt der Fall bei dem inneren Elektron, dessen Bahn stark verzerrt wird. Multipliziert man nämlich (9b) mit $2\omega/\omega - \Omega$ und subtrahiert von (9a), so erhält man bei Vernachlässigung von Ω^2 neben ω^2

$$\frac{r_1}{r_0} = -\tfrac{3}{2}\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\cdot\frac{1}{\mu r_0\omega\Omega - \left(\frac{2\varepsilon^2}{r_0} - \mu r_0\omega^2\right)}.$$

Dividiert man hier Zähler und Nenner durch $2\varkappa 2\varepsilon^2/r_0^2$ (7), so wird bis auf einen Faktor $1 + [\varrho_0^{4/3}]$

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_1}{r_0} &= -\tfrac{3}{2}\frac{\varrho_0^2}{2(\varrho_0^{4/3} - \eta)},\\ \varphi_1 &= -2\frac{r_1}{r_0}(1 + [\varrho_0^{4/3}]),\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

wenn

$$\eta = 4\left(1 - \frac{\mu r_0\omega^2}{2\varepsilon^2/r_0^2}\right) \qquad (11')$$

gesetzt wird. Der in η auftretende Fourier-Koeffizient r_0 wird erst simultan mit den zwei Gleichungen bestimmbar, welche durch Nullsetzen des konstanten Teils von (8a) und (8c) erhalten werden[1]). Diese Gleichungen heißen

$$\mu\{r_0\omega^2 + r_0\varphi_1^2(\omega-\Omega)^2\tfrac{1}{2} + r_1\varphi_1\omega(\omega-\Omega)\} = = \frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}\left(1 + \tfrac{3}{2}\frac{r_1^2}{r_0^2}\right) - \frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\left\{\frac{R_1}{R_0} + + \tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \Phi_1) - \tfrac{1}{2}\frac{r_0}{R_0}\right\} \qquad (12a)$$

---

1) Man darf in (11) nicht für η näherungsweise den intermediären Wert $\bar{\eta} = 0$ setzen, der zu

$$r_1/r_0 = -\frac{3}{4}\sqrt{\varrho_0}$$

führen würde. Denn es stellt sich der gestörte Wert η größer als sein Addend $\varrho_0^{4/3}$ heraus. Dieser Fehler wurde in der nach dem Muster der Dispersionstheorie durchgeführten Rechnung (A. Landé, l. c.) implicite gemacht, und täuscht auch die allgemeinen Dispersionsformeln von Sommerfeld (Elster-Geitel-Festschrift) für den Fall, daß der Elektronenring aus einem Elektron besteht.

$$\mu\{R_0\Omega^2+R_0\Phi_1^2(\omega-\Omega)^2\cdot\tfrac{1}{2}+R_1\Phi_1\Omega(\omega-\Omega)\}=$$
$$=\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}+\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0}\Big\{3\frac{R_1}{R_0}+(\varphi_1-\Phi_1)-$$
$$-\tfrac{3}{4}\frac{r_0}{R_0}-\frac{r_1}{r_0}\Big\}. \qquad (12c)$$

Wegen der Kleinheit (10) von R_1/R_0 und Φ_1 und der nach (11) angenäherten Beziehung

$$\varphi_1=-2\,r_1/r_0$$

wird daraus

$$\Big(\frac{2\,\varepsilon^2}{r_0^3}-\mu r_0\,\omega^2\Big)+\frac{2\,\varepsilon^2}{r_0^3}\frac{3}{2}\frac{r_1^2}{r_0^2}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\Big(\frac{r_1}{r_0}+\frac{1}{2}\frac{r_0}{R_0}\Big)=0 \qquad (13a)$$

$$\Big(\frac{\varepsilon^2}{R_0^3}-\mu\,R_0\,\Omega^2\Big)-$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0}\Big(\frac{3}{4}\frac{r_0}{R_0}+3\frac{r_1}{r_0}\Big)=0. \qquad (13c)$$

Durch (11′) wird aus (13a)

$$\eta+6\frac{r_1^2}{r_0^2}+\tfrac{1}{2}\varrho_0^2\frac{r_1}{r_0}+\tfrac{1}{8}\varrho_0^3=0+[\varrho_0^4] \quad (11'')$$

(11′), (11″) sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten η und r_1/r_0, welche gelöst werden durch

$$\left.\begin{aligned}\eta&=-\tfrac{3}{2}\varrho_0^{4/3}+\tfrac{3}{2}\varrho_0^{5/3}-\frac{2}{27}\varrho_0^{6/3}\cdots\\ \frac{r_1}{r_0}&=-\tfrac{1}{2}\varrho_0^{4/3}+\tfrac{1}{3}\varrho_0^{5/3}+[\varrho_0^{6/3}],\\ \varphi_1&=-2\frac{r_1}{r_0}\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

also nach (11′) und (13c)

$$\frac{2\,\varepsilon^2}{r_0^3}-\mu r_0\,\omega^2=\frac{2\,\varepsilon^2}{r_0^3}\Big(-\tfrac{3}{8}\varrho_0^{4/3}+$$
$$+\tfrac{1}{8}\varrho_0^{5/3}-\frac{1}{54}\varrho_0^{6/3}\Big)$$
$$\frac{\varepsilon^2}{R_0^3}-\mu\,R_0\,\Omega^2=\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\Big(\tfrac{3}{8}\varrho_0^{4/3}+$$
$$+\tfrac{1}{8}\varrho_0^{11/3}+\frac{3}{16}\varrho_0^2\Big), \qquad (15)$$

abweichend von den intermediären Beziehungen (4′).

Die erhaltenen Werte $r_1:r_0$ und φ_1 bedeuten eine Verzerrung der inneren Elektronenbahn, nämlich eine exzentrische Verschiebung von der jeweiligen Lage des äußeren Elektrons fortgewendet. Ihr Effekt ist eine scheinbare Verstärkung der Kernladungswirkung auf das äußere Elektron.

Nachdem durch (10), (14), (15) die Fourier-Koeffizienten $r_0\,r_1\,R_0\,R_1\,\varphi_1\,\Phi_1$ der Reihen (5) bestimmt sind, bleibt noch übrig, auch $r_2\varphi_2\,R_2\,\Phi_2$ zu bestimmen. Es wird sich aber zeigen, daß letztere Koeffizienten in der Energie des gestörten Systems keine Rolle spielen, soweit die hier erstrebte Näherung verfolgt wird. Trotzdem wollen wir der Vollständigkeit halber die Gleichungen für $r_2\,\varphi_2\,R_2\,\Phi_2$ aufstellen. Sie werden erhalten durch Nullsetzen des Faktors von $\cos 2\gamma_0$ bzw. $\sin 2\gamma_0$ in (8) und heißen (16a) (16b):

$$\frac{r_2}{r_0}\Big[-4\mu(\omega-\Omega)^2 r_0-\mu\omega^2 r_0-2\frac{2\,\varepsilon^2}{r_0^4}\Big]+\varphi_2[-4\mu\omega(\omega-\Omega)r_0]=$$
$$-\mu\omega(\omega-\Omega)r_1\varphi_1+\mu(\omega-\Omega)^2 r_0\varphi_1^2\cdot\tfrac{1}{2}+\frac{2\,\varepsilon^2}{r_0^2}\Big(-\frac{3}{2}\frac{r_1^2}{r_0^2}\Big)+\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\Big(\frac{R_1}{R_0}-\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\Phi_1)-\frac{3}{2}\frac{r_0}{R_0}\Big) \qquad (16a)$$

$$\frac{r_2}{r_0}[-4\mu\omega(\omega-\Omega)r_0]+\varphi_2[-4\mu(\omega-\Omega)^2 r_0]=\tfrac{3}{2}\mu(\omega-\Omega)^2 r_1\varphi_1-\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\Big(\frac{R_1}{R_0}-(\varphi_1-\Phi_1)\tfrac{1}{2}-\frac{3}{2}\frac{r_0}{R_0}\Big) \qquad (16b)$$

und zwei entsprechende Gleichungen (16c) und (16d) für R_2 und Φ_2.

(16a, b) gehen in unserer Näherung über in

$$7\cdot\frac{r_2}{r_0}+4\varphi_2=\tfrac{3}{8}\varrho_0^{4/3}$$
$$4\frac{r_2}{r_0}+4\varphi_2=\tfrac{3}{4}\varrho_0^{4/3}$$

mit den angenäherten Lösungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_2}{r_0}&=-\tfrac{1}{8}\varrho_0^{4/3},\\ \varphi_2&=-\frac{5}{2}\frac{r_2}{r_0}\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

während die Werte $\frac{R_2}{R_0}$ und Φ_2 in noch höherem Grade verschwinden als $R_1\,R_0$ und Φ_1 in (18).

Durch (10), (14), (17) sind jetzt die Fourier-Koeffizienten der gestörten Bahnen (5) als Funktionen von r_0, R_0 und ϱ_0 bestimmt, r_0 und R_0 selbst sind durch (15) als Funktionen von ω, Ω und ϱ_0 gegeben. Die gestörten Bahnen hängen also letzten Endes von dem Wert zweier Parameter ab, z. B. von ω und Ω oder auch r_0 und R_0.

§ 3. Die Energie des gestörten Elektronensystems teilen wir ein in

1. Energie des inneren Elektrons W_i = kinetische Energie + potentielle Energie gegen den Kern,

2. Energie des Außenelektrons W_a = kinetische Energie + potentielle Energie gegen den Kern und das im Kern gedachte innere Elektron,

3. potentielle Energie V_{ia} der Störungskräfte. Es wird also nach (2), (2′)

$$\left.\begin{aligned} W_i &= \frac{\mu}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{2\varepsilon^2}{r} \\ W_a &= \frac{\mu}{2}(\dot R^2 + R^2\dot\Phi^2) - \frac{\varepsilon^2}{R} \\ V_{ia} &= \frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{r}{R}\cos\gamma + \frac{r^2}{R^2}\,\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Setzt man in W_i die Fourier-Reihen (5) ein, ohne die von uns berechneten speziellen Werte $r_0\, r_1\, r_2\, \varphi_1\, \varphi_2$ zu benutzen, so erhält man W_i in der Form

$$W_i = \text{konst.} + f_1(r_1\varphi_1)\cdot\cos\gamma_0 + f_2(r_1\varphi_1 r_2\varphi_2)\cos 2\gamma_0.$$

Setzt man in die dabei auftretenden Funktionen f_1 und f_2 die (angenäherten) Beziehungen (14), (17)

$$\varphi_1 = -2\frac{r_1}{r_0}, \quad \varphi_2 = -\frac{5}{2}\frac{r_2}{r_0} \qquad (18')$$

ein, so verschwinden f_1 und f_2, und es bleibt als konstanter Teil übrig

$$W_i = \frac{\mu}{2}r_0^2\omega^2 - \frac{2\varepsilon^2}{r_0} - \frac{\mu}{2}r^2{}_0\,\omega^2\cdot 2\frac{r_1^2}{r_0^2} = -\frac{\varepsilon^2}{r_0}\left(1 + 2\eta + 2\frac{r_1^2}{r_0^2}\right)$$

oder mit Benutzung von (14) der Wert

$$W_i = -\frac{\varepsilon^2}{2r_0}\left(2 + \tfrac{1}{4}\rho_0^{4/3} - \tfrac{1}{9}\rho_0^{8/3} + \frac{1}{81}\rho_0^{4/3}\right), \quad (19)$$

der auch als Zeitmittel der in Wahrheit sehr schwach periodisch schwankenden Energie des inneren Elektrons angesehen werden kann[1]).

Wegen der Kleinheit (10) von R_1 und Φ_1 wird ferner

$$W_a = \frac{\mu}{2}R_0^2\Omega^2 - \frac{\varepsilon^2}{R_0} = -\frac{\varepsilon^2}{2R_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^2}{R_0} - \mu R_0^2\Omega^2\right)$$

also nach (15)

$$W_a = -\frac{\varepsilon^2}{R_0}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{8}\rho_0^{4/3} + \frac{1}{12}\rho_0^{11/3} + \frac{3}{32}\rho_0^2\right). \qquad (20)$$

1) Daß die periodischen Glieder von W_i in höherer Ordnung verschwinden, zeigt an, daß der Gesamtbetrag der Energie des Innenelektrons groß ist gegen die von ihm gewonnene Energie auf seinem Wege von der Konjunktion zur Opposition unter der störenden Kraft des Außenelektrons.

Da ferner der zeitliche Mittelwert von

$$r\cos\gamma = (r_0 + r_1\cos\gamma_0)(\cos\gamma_0 - \varphi_1\sin^2\gamma_0)$$

gleich

$$\tfrac{3}{2}r_0\frac{r_1}{r_0}$$

ist [vgl. (5″), (18′)], wird der Mittelwert von V_{ia} nach (18)

$$V_{ia} = \frac{\varepsilon^2}{R_0}\left(\frac{3}{2}\frac{r_0}{R_0}\frac{r_1}{r_0} + \frac{r_0^2}{R_0^2}\cdot\frac{1}{4}\right)$$

und mit Benutzung von (14)

$$V_{ia} = \frac{\varepsilon^2}{R_0}\left(-\tfrac{3}{8}\rho_0^{4/3} + \frac{1}{12}\rho_0^{11/3} + \frac{1}{16}\rho_0^2\right) \quad (21)$$

also

$$W_a + V_{ia} = -\frac{\varepsilon^2}{R_0}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{32}\rho_0^2\right). \qquad (22)$$

§ 4. Wir sind jetzt imstande, eine an anderer Stelle[1]) erläuterte Quantelungsmethode anzuwenden, speziell mit Benutzung der dortigen Gleichung [6], da es sich beim neutralen Helium ja auch nur um zwei „Ringe" handelt. Statt der dort benutzten Variablen $r_1\, r_2$ wollen wir aber hier die Größen $2r_0$ und R_0 nehmen, an denen im folgenden der Index o fortgelassen werden soll.

Statt [6], [6′] l. c. gilt hier für die beiden adiabatischen Prozesse

$$\frac{dR}{d(2r)} = -\frac{\partial(W_i + V_{ia})/\partial(2r)}{\partial W_i/\partial R} \qquad (23a)$$

bzw.

$$\frac{d(2r)}{dR} = -\frac{\partial(W_a + V_{ia})/\partial R}{\partial W_a/\partial 2r} \qquad (23b)$$

ausgehend von dem Anfangszustand

$$R = \infty, \quad r = \mathring r \quad \text{bzw.} \quad r = 0, \quad R = \mathring R. \qquad (24)$$

Für die totalen Änderungen dW_i und dW_a erhält man aus (23a), (23b)

$$dW_i = -dR\cdot\frac{\partial V_{ia}}{\partial(2r)} : \frac{dR}{d(2r)}$$

bzw.

$$dW_a = -d(2r)\frac{\partial V_{ia}}{\partial R} : \frac{d(2r)}{dR}. \qquad (25)$$

Um (23a) zu integrieren, braucht man

$$\frac{\partial(W_i + V_{ia})}{\partial(2r)} = \frac{\varepsilon^2}{4r^2}\left(2 - \frac{1}{12}\rho^{4/3}\right)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial R} = \frac{\varepsilon^2}{4r^2}\tfrac{1}{3}\rho^{1/3}(1 - \tfrac{1}{2}\rho^{1/3}).$$

Daher wird aus (23a)

$$\frac{dR}{d(2r)} = -\rho^{-4/3}\cdot 6\cdot(1 + \cdots). \qquad (26)$$

1) Vgl. A. Landé, Adiabatenmethode zur Quantelung gestörter Elektronensysteme, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 21, 578, 1919. Formeln dieser Arbeit werden hier in eckigen Klammern zitiert.

Andererseits ist

$$-\frac{\partial V_{ia}}{\partial(2r)} = \frac{\varepsilon^2}{R^2}\frac{5}{8}\varrho^{3/5}(1+\cdots).$$

Die totale Änderung dW_i wird also nach (25)

$$dW_i = -\frac{\varepsilon^2}{R^2}\frac{5}{48}(1+\cdot\cdot)\,dR.$$

Integriert man zwischen den Grenzen $R=\infty$ und R (24), so ergibt sich bis auf Glieder höherer Ordnung in ϱ

$$W_i - \mathring{W}_i = \frac{\varepsilon^2}{2R}\cdot\frac{5}{96}+\cdot\cdot \qquad (26')$$

wobei

$$\mathring{W}_i = -\frac{\varepsilon^2}{\mathring{r}},$$

falls man bei der Integration r als Konstante behandelt; daß letzteres in der hier erstrebten Näherung berechtigt ist, geht hervor aus Gleichung (26) die sich auch schreiben läßt in der Form

$$d(2r)\cdot(2r)^{-3/5} = \tfrac{1}{8}\,dR\cdot R^{-3/5}(1+\cdot\cdot).$$

Ihr Integral zwischen den Grenzen $R=\infty$, $r=\mathring{r}$ bis R, r heißt

$$\frac{r-\mathring{r}}{r} = \tfrac{1}{8}\varrho^{3/5}. \qquad (26'')$$

Während der Zusammenziehung von R aus dem Unendlichen erfährt also r nur eine kleine Ausdehnung von der relativen Ordnung $\varrho^{3/5}$. Um (23b) zu integrieren, braucht man aus (22)

$$\frac{\partial(W_a+V_{ia})}{\partial R} = \frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{28}\varrho^2\right)$$

$$\frac{\partial W_a}{\partial(2r)} = \frac{\varepsilon^2}{R^2}\frac{5}{8}\varrho^{3/5}\left(1-\frac{11}{45}\varrho^{3/5}-\frac{3}{10}\varrho^{3/5}\right).$$

Also geht (23b) über in

$$\frac{d(2r)}{dR} = -\varrho^{-3/5}\cdot 8\,\frac{1-\frac{3}{16}\varrho^2}{1-\frac{11}{45}\varrho^{3/5}-\frac{3}{10}\varrho^{3/5}}$$

oder

$$\frac{d(2r)^{3/5}}{d\,R^{3/5}} = -\frac{5}{5}\,\frac{1-\frac{3}{16}u^{6/5}}{1-\frac{11}{45}u^{3/5}-\frac{3}{10}u^{3/5}} = f(u),$$

wenn zur Abkürzung der Quotient

$$\frac{(2r)^{3/5}}{d\,R^{3/5}} = u, \quad \text{also } \varrho = u^{5/3}$$

gesetzt wird. Führt man nun statt $2r$ und R die neuen Variablen u und $R^{3/5}$ ein, so ergibt sich die Umformung

$$\frac{d(R^{3/5})}{R^{3/5}} = \frac{du}{f(u)-u}.$$

Integration zwischen den Grenzen $r=0$, $R=\mathring{R}$ bis r, R ergibt bis auf höhere Potenzen von u

$$\ln\left(\frac{R}{\mathring{R}}\right) = \frac{5}{2}\int_0^u du\left(-\frac{5}{4}\right)\left(1-\frac{11}{45}u^{3/5}-\frac{3}{10}u^{3/5}\right)$$

oder bei Wiedereinführung von ϱ statt u

$$\frac{\mathring{R}}{R} = 1-\tfrac{5}{8}\varrho^{3/5}\left(1-\tfrac{5}{8}\varrho^{3/5}-\tfrac{1}{4}\varrho^{3/5}\right). \qquad (27)$$

Einsetzung in W_a+V_{ia} (22) ergibt schließlich

$$W_a+V_{ia} = -\frac{\varepsilon^2}{2\mathring{R}}\left(1+\tfrac{3}{4}\varrho^{3/5}-\frac{1}{24}\varrho^{11/5}-\tfrac{1}{8}\varrho^2\right)+\cdot\cdot \qquad (27')$$

$$W_a+V_{ia}-\mathring{W}_a = -\frac{\varepsilon}{2\mathring{R}}\left(\tfrac{3}{4}\varrho^{3/5}-\tfrac{1}{6}\varrho^{11/5}-\tfrac{1}{8}\varrho^2\right). \qquad (27'')$$

Ein Vergleich von (27'') mit (26') zeigt, daß der Energiegewinn von W_i gegenüber $\mathring{W}_i$ von höherer Ordnung klein ist gegen den Verlust W_a+V_{ia} gegenüber $\mathring{W}_a = -\varepsilon^2/2\mathring{R}$. In unserer Näherung bleibt also W_i während des adiabatischen Prozesses konstant, in Übereinstimmung mit einem Theorem von Herrn N. Bohr[1].

Die Gesamtenergie

$$E = W_i + W_a + V_{ia}$$

des gestörten Systems wird also nach (26'), (27') bis auf Glieder höherer Ordnung in $\dot{\varrho} = 2\dot{\mathring{r}}/\mathring{R}$ (vgl. (7')):

$$E = -\frac{\varepsilon^2}{\mathring{r}} - \frac{\varepsilon^2}{2\mathring{R}} - \frac{\varepsilon^2}{2\mathring{R}}\tfrac{3}{4}(\dot{\mathring{\varrho}})^{3/5}\left[1-\right.$$
$$\left.-\tfrac{5}{8}(\dot{\mathring{\varrho}})^{3/5}-\tfrac{1}{6}(\dot{\mathring{\varrho}})^{3/5}+\cdot\cdot\right], \qquad (28)$$

worin die beiden ersten Glieder den intermediären Energiewert angeben. Man kann diese Formel so auffassen, als sei die Energie des inneren Elektrons unverändert auf dem intermediären Wert $-\varepsilon^2/r$ geblieben, während sich der absolute Betrag der Energie des äußeren Elektrons mit dem Störungsfaktor

$$E_a:\ \mathring{E}_a = 1+\tfrac{3}{4}(\dot{\mathring{\varrho}})^{3/5}-\tfrac{1}{6}(\dot{\mathring{\varrho}})^{11/5}-\tfrac{1}{8}(\dot{\mathring{\varrho}})^2 \qquad (28')$$

multipliziert habe. Die in $\dot{\mathring{\varrho}}$ vorkommenden Radien $\mathring{r}$ und $\mathring{R}$ sind die im ungestörten Zustand quantentheoretisch festgelegten Bahnradien mit den Quantenzahlen n_i und n_a und besitzen die Werte

$$\mathring{r} = a_0\cdot\frac{n_i^2}{Z_i},\quad \mathring{R} = a_0\cdot\frac{n_a^2}{Z_a},\quad a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2\mu\varepsilon^2}, \qquad (28'')$$

wobei $Z_i=2$ und $Z_a=1$ die „wirksamen Kernladungszahlen" und a_0 den Radius der einquantigen Bahn des Wasserstoffelektrons be-

1) N. Bohr, The Quantum Theory of Line-Spectra, Teil 2, § 2, Kopenhagen 1918. Dieses Theorem war in der vorläufigen Mitteilung des Verf. (l. c.) über das *He* nicht erfüllt, der dortige Vergleich mit quasielastischen Verhältnissen (S. 229) war also unzutreffend. Der Fehler wurde dort durch die oben S. 116 Fußnote erwähnte Annäherung aufgehoben.

deuten. Beim Helium ist überdies $n_i = 1$ anzunehmen. Schreibt man also für n_a einfach n, so wird schließlich

$$\mathring{\varrho} = \frac{2\mathring{r}}{R^0} = \frac{1}{n^2}$$

und (28′) geht über in die endgültige Formel

$$E_a : \mathring{E}_a = 1 + \tfrac{3}{4} n^{-1/4} - \tfrac{1}{8} n^{-11/4} - \tfrac{1}{8} n^{-4} + \cdots \quad (29)$$

Das letzte hier hingeschriebene Glied

$$-1 : 8\, n^4 = -\mathring{r}^2 : 2\mathring{R}^2$$

erscheint bei Sommerfeld als niedrigstes Störungsglied, wenn man von der Vorstellung der gleichmäßigen Ladungsverteilung auf den Ringperipherien ausgeht. Die beiden ersten Störungsglieder von (29) sind der exzentrischen Verschiebung der inneren Bahn im Kraftfeld des äußeren Elektrons zuzuschreiben. Letztere Verschiebung gibt zu den Störungen der Ordnung n^{-4} keinen Beitrag, weil in (14) nach den Gliedern mit $\varrho_0^{3/4}$ sofort Glieder mit $\varrho_0^{7/4}$ folgen.

Es ist klar, daß die abgebrochene Reihe (28′), (29) für die Quantenzahl $n = 1$ keine zureichende Näherung zum Vergleich mit der Erfahrung darstellt.

§ 5. Die exakte Störungstheorie des Heliumatoms bei geneigten Bahnebenen und elliptischem Umlauf hat Verfasser nicht durchgeführt. Nach Analogie zu früher erhaltenen Resultaten[1]) liegt jedoch Grund vor zu der Annahme, daß ein Neigungswinkel Θ zwischen den Bahnebenen die Energieformeln (28′) und (29) in folgender Weise ändert: Die beiden ersten Störungsglieder, welche der exzentrischen Verschiebung des inneren Elektrons zuzuschreiben waren, sind mit dem Faktor $\cos\Theta$ zu versehen, das dritte Störungsglied mit dem Faktor

$$(3\cos^2\Theta - 1) : 2,$$

mit dem auch in Sommerfelds Theorie der geneigten Ringe[2]) das entsprechende Glied behaftet ist. [Diese beiden Faktoren sind bekannt als erste und zweite Kugelfunktion von $\cos\Theta$.] Bei elliptischer Bahn des äußeren Elektrons mit der radialen Quantenzahl n' und der azimutalen Quantenzahl n führt die erwähnte Analogie dazu, alle hingeschriebenen Störungsglieder mit dem Faktor

$$n : (n + n')$$

zu multiplizieren. (29) geht dann über in die Energieformel[3])

	Beobachtung		Theorie			
	ν_{He}	$\nu_H : \nu_H$	$n'n$	k	ϑ	$\nu_{He} : \nu_H$
S_I	—	—	01	1	120°	0,7236
	32 031	1,168	11	1		0,8618
	13 445	1,103	21	1		0,9078
	7 369	1,075	31	1		0,9308
	4 646	1,059	41	1		0,9447
P_I	27 174	0,989	02	2	104° 28′	0,9873
	12 099	0,992	12	2		0,9919
	6 817	0,994	22	2		0,9939
	4 307	0,995	32	2		0,9951
D_I	12 204	1,0011	03	3	99° 35′	0,9982
	6 863	1,0009	13	3		0,9987
	4 391	1,0007	23	3		0,9989

	Beobachtung		Theorie			
	ν_{He}	$\nu_H : \nu_H$	$n'n$	k	ϑ	$\nu_{He} : \nu_H$
S_{II}	—	—	01	2	0°	1,457
	38 453	1,402	11	2		1,229
	15 073	1,237	21	2		1,152
	8 011	1,168	31	2		1,114
	4 963	1,131	41	2		1,092
P_{II}	29 222	1,0657	02	3	0°	1,0536
	12 745	1,0458	12	3		1,0367
	7 093	1,0337	22	3		1,0268
	4 509	1,0278	32	3		1,0214
D_{II}	12 208	1,0012	03	4	0°	1,0136
	6 865	1,0010	13	4		1,0102
	4 393	1,0009	23	4		1,0081

$$E_a : \mathring{E}_a = 1 + \frac{n}{n+n'}\left[\cos\Theta\left(\tfrac{3}{4} n^{-1/4} - \tfrac{1}{8} n^{-11/4} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{3\cos^2\Theta - 1}{2} \cdot \tfrac{1}{8} n^{-4} + \cdots\right]\right. \quad (30)$$

Für Θ sind die Werte einzusetzen, welche sich aus der Quantelung der räumlichen Orientierung (bzw. der Präzessionsbewegung) von Elektronenringen ergeben und die aus Gl. (4) und (5) einer Arbeit des Verfassers[1]) abzulesen sind. Es sind das komplanare Bahnen mit gleichgerichteter Rotation beider Elektronen

$$(\vartheta + \vartheta' = \Theta = 0^0)$$

bzw. entgegengerichteter Rotation

1) A. Landé, diese Zeitschr. **20**, 228, 1919.

2) A. Sommerfeld, diese Zeitschr. 19, 297, 1918.

3) Während als Faktor des Gliedes mit $n^{-4} = (2\pi R)^2$ die zweite Kugelfunktion wohl das Richtige trifft, ist statt $\cos\Theta$ als Faktor der ersten Störungsglieder wahrscheinlich eine kompliziertere Funktion von Θ zu nehmen, deren Gestalt erst weitere Rechnung geben kann, die aber das Resultat qualitativ wohl nicht und quantitativ wohl nur wenig gegen (30) ändern wird.

1) Vgl. A. Landé, Eine Quantenregel für die räumliche Orientierung von Elektronenbahnen. Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 585, 1919. Die dortigen Gl. (4) und (5) heißen

$$n\cos\vartheta + n'\cos\vartheta' = k$$
$$n\sin\vartheta - n'\sin\vartheta' = 0,$$

worin ϑ und ϑ' die Neigungswinkel der beiden Elektronenbahnen gegen die unveränderliche Ebene bedeuten, und $n\,n'\,k$ drei ganze Zahlen sind. Diese Quantenregeln gelten aber nur, wenn man die Störungskräfte vernachlässigt, ein Fall, der hier, besonders bei den Bahnen S_I, welche der Theorie Schwierigkeit bereiten, nur in roher Näherung zutrifft.

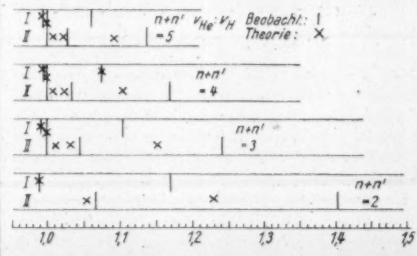
$$(\vartheta + \vartheta' = \Theta = 180^0)$$

und bei $n = 1$ überdies $\Theta = 120^0$, bei $n = 2$ $\Theta = 104^0\,28'$; bei $n = 3$ $\Theta = 99^0\,35'$ usw. Die theoretischen Werte des Verhältnisses $E_a : \hat{E}_a$ sollen sich in der Beobachtung wiederfinden als Verhältniszahlen $\nu_{He} : \nu_H$ der Heliumterm-Schwingungszahlen zu den Normalschwingungszahlen der Wasserstoffterme. Die folgende Tabelle gibt neben den theoretischen Werten, welche zu den verschiedenen Wertetripeln n (azimutale) n' (radiale) k (Gesamtimpulsquantenzahl) mit zugehörigen Winkeln

$$\vartheta,\ \vartheta',\ \Theta = \vartheta + \vartheta'$$

gehören, auch die beobachteten Schwingungszahlen der He-Terme und ihre Quotienten $\nu_{He} : \nu_H$ mit den beobachteten Normalzahlen des Wasserstoffs. Die Beobachtung unterscheidet zwei gesonderte Heliumspektren, nämlich He_{I} aus einfachen und He_{II} aus Dupletermen bestehend, ferner innerhalb jeder dieser beiden Spektren S-Terme, P-Terme und D-Terme, welche sich zu den Kombinationen $S-P$ (Hauptserie), $P-D$ (1. diffuse Nebenserie) und $P-S$ (2. scharfe Nebenserie) zusammenfinden. Die S-Terme sind übrigens auch bei He_{II} einfach. An den experimentellen Termwerten fällt auf, daß zwar bei He_{II} ein Abfallen der Werte $\nu_{He} : \nu_H$ von den S- zu den P- und D-Termen der gleichen Quantenzahl $n + n'$ stattfindet, daß dagegen bei He_{I} ein solcher Gang nur zwischen den P- und D-Termen stattfindet, während die beobachteten S_{I}-Terme vollkommen außerhalb dieses Ganges liegen. Daher ist von vornherein zu erwarten, daß die Theorie nicht ohne weiteres zur Erklärung der S_{I}-Terme führen kann. Berechnet man nun nach (30) die theoretischen $\nu_{He} : \nu_H$-Werte zu allen möglichen Kombinationen der Quantenzahlen $n\,n'\,k$ für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ mit Ausschluß der komplanaren Gegenrotation, so findet man Werte, die mit den daneben geschriebenen Beobachtungen der S-, P- und D-Terme von He_{I} und He_{II} vereinbart werden können. Und zwar ist die Übereinstimmung bei den Termen $n = 2$ und $n = 3$ gut, bei S_{II} ($n = 1$) wenigstens qualitativ richtig; bei letzteren Termen ($n = 1$) reicht eben die Näherung (30) nicht im entferntesten mehr aus. Dagegen fallen bei S_{I}, wie zu erwarten, Beobachtung und Theorie auch qualitativ ganz auseinander. Bei 60^0 Neigung (Nebenwinkel von 120^0, d. h. Umkehr der Umlaufsrichtung) würden die beobachteten Werte von S_{I} resultieren. 60^0 Neigung ist aber quantentheoretisch nicht zulässig. Es liegt hier vielleicht ein andersartiger Bahntypus vor.

Während beim Wasserstoff zu der einen Gesamtquantenzahl $n + n'$ nur eine Schwingungszahl ν_H (abgesehen von der Feinstruktur) gehört, treten zu dem gleichen $n + n'$ beim Helium mehrere Schwingungszahlen ν_{He} auf, eine Art Grobstruktur durch verschiedene Exzentrizität und räumliche Neigung der Bahnen. In der Figur, deren horizontaler Maßstab die Werte des Quotienten $\nu_{He} : \nu_H$ angibt, ist diese Grobstruktur des Terms $n + n'$ für jede Gesamtquantenzahl $n + n'$ in einem besonderen horizontalen Band gezeichnet, wobei noch He_{I} (Parhelium) und He_{II} (Dupletlinien) untereinander getrennt aufgetragen sind und zwar die Beobachtung als senkrechte Linien, die theoretischen Werte als Kreuze. Theoretische Werte von S_{I} sind nicht eingezeichnet, da S_{I} offenbar auf einer anderen Entstehungsart als der hier behandelten beruht. Die entsprechenden Wasserstofflinien würden also in der Figur senkrecht über dem Teilstrich 1,0 liegen. Die Aufspaltung dieser normalen Linien durch die gegenseitigen Bahnstörungen geht also beim Helium bis zu 40 Proz. ihres ungestörten Normalwertes, was früher den Anlaß zur Einführung gebrochener Quantenzahlen für die S-Terme gegeben hat. Hier, wo die gebrochenen als gestörte ganze Quantenzahlen aufgefaßt werden, ist es deshalb nicht verwunderlich, daß die Störungstheorie mit den ersten Reihengliedern quantitativ nicht mehr ausreicht. Besonders befriedigend erscheint es, daß die Quantelung der Präzessionen, die Mannigfaltigkeit der räumlichen Stellungen bei jedem n auf zwei beschränkt, Komplanarität bei He_{II} und Neigungswinkel von nahezu 90^0 bei He_{I}. Die dritte Bahnstellung, komplanar entgegengesetzt rotierende Elektronen ($\Theta = 180^0$), besitzt einen so kleinen negativen Energiewert E_a gegenüber den Energiewerten der beiden andern Stellungen, daß diese Gegenrotation aus Stabilitätsgründen auszuschließen ist. Eine Erklärung für das Zustande-



kommen der S_1-Terme und für die Duplizität der He_{II}-Terme fehlt[1]).

1) In einer Arbeit „Über Serienspektren nach dem Bohrschen Modell" von F. Tank, Ann. d. Phys. 59, 203, 1919 werden die gegenseitigen Störungen der beiden *He*-Elektronen so berechnet, als seien die Ladungen kontinuierlich über ihre Bahnen verteilt. Dabei „wird Anschluß an die Erfahrung nur bei den Hauptserientermen erreicht", und zwar unter der Annahme, daß beim Parhelium (He_I) beide Elektronen in derselben Ebene laufen, beim Helium (He_{II}) in nahezu senkrecht gekreuzten Ebenen (umgekehrt als bei uns), daß bei He_I das innere Elektron einen einquantigen Kreis, beim He_{II} einen zweiquantigen Kreis beschreibt. Es erscheint aber die gewählte Annäherung (kontinuierliche Ladungsverteilung) nicht zulässig zu sein, weil die Störungen 1. Ordnung dabei unberücksichtigt bleiben. Auch die Annahme eines zweiquantigen inneren Elektrons bei He_{II} kann nicht befriedigen.

(Eingegangen 17. August 1919.)

Theoretisches über den Schalldruck.

(§ 3 als Erwiderung an Herrn Budde.)

Von E. Waetzmann.

Rayleigh[1]) hat zu beweisen versucht, daß eine stehende Schallwelle auf eine vollkommen reflektierende Wand einen Druck ausübt, der gleich $\frac{1}{2}(\gamma + 1)\varepsilon$ ist, worin γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen und ε die Energiedichte ist.

Ich[2]) habe dann gefunden, daß gleichzeitig mit dem Schalldruck neue Töne entstehen müssen, die in den primär gegebenen Schwingungen nicht enthalten sind; oder mit anderen Worten, daß die gleichen Bedingungen, welche das Auftreten von Schalldruck veranlassen, zugleich die Ursache für die Entstehung neuer Töne sind. Ich habe das für einen speziellen Fall bewiesen und habe auch besprochen, weshalb Rayleigh auf diesen Zusammenhang zwischen Schalldruck und neuen Tönen nicht aufmerksam geworden ist. Es liegt dies daran, daß Rayleigh nur den zeitlichen Mittelwert der Druckschwankungen, die beim Auftreffen einer Schallwelle an einer reflektierenden Wand stattfinden, betrachtet hat, während für die Erschließung der neuen Töne natürlich der gesamte zeitliche Verlauf des Druckes berechnet werden mußte[3]).

Diese Berechnung ist dann von F. Küstner[4]) im hiesigen Institut durchgeführt worden, und hat die allgemeine Bestätigung und quantitative Ergänzung dessen gebracht, was ich nur qualitativ und prinzipiell an Hand eines bestimmten Falles gezeigt hatte.

Im folgenden möchte ich einige ergänzende Überlegungen zu dem spärlichen bisher in dieser Frage vorliegenden Material mitteilen, zumal ich gehört habe, daß die Richtigkeit meiner ursprünglichen Ausführungen verschiedentlich von Fachgenossen angezweifelt worden ist (§ 1). Ferner möchte ich im Anschluß an die zitierte Arbeit Küstners einige Bemerkungen über die Vernachlässigung der Glieder höheren Grades in den hydrodynamischen Gleichungen machen (§ 2), und endlich zu einer Arbeit des Herrn Budde[1]) Stellung nehmen (§ 3). In dieser Arbeit wird auch behauptet, daß der Gedankengang in meiner oben zitierten Arbeit falsch sei, während die Küstnersche Ausrechnung als richtig anerkannt wird; und nun wird kurzweg von der „Küstnerschen Theorie", statt — wenn überhaupt Namen genannt werden sollen — von der Waetzmann-Küstnerschen Theorie gesprochen[2]). Ich hätte Herrn Budde schon früher geantwortet, wenn es mir nicht durch den Krieg und daran anschließende Krankheit unmöglich gemacht worden wäre; ich bitte also, mein bisheriges Schweigen nicht etwa als Zustimmung zu der Buddeschen Arbeit aufzufassen.

§ 1. Über den Zusammenhang zwischen Schalldruck und Kombinationstönen (K. T). Eine Schallquelle, z. B. eine schwingende starre Platte an dem einen Ende eines Kundtschen Rohres, führe Schwingungen von der Form $A \sin 2\pi m t$ aus. Nach Rayleigh wird dann auf die feste Wand am anderen Ende des Rohres ein konstanter Druck ausgeübt, der im wesentlichen gleich der Energiedichte in dem Rohre ist. Dieser Wert wird gefunden, indem der Mittelwert des Druckes an der reflektierenden Wand über eine volle Periode, also in unserem Falle über die Zeit $\frac{1}{m}$ gebildet wird. Für die Berechnung der

1) Rayleigh, Phil. Mag. (6) 10, 364, 1905.
2) E. Waetzmann, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 424, 1914 (Waetzmann I).
3) E. Waetzmann, l. c. S. 429.
4) F. Küstner, Ann. d. Phys. 50, 941, 1916.

1) E. Budde, diese Zeitschr. 19, 321, 1918.
2) In dem Referat, welches Herr E. Lübcke in Bd. 43, Heft 5, S. 164, 1919, der „Beiblätter zu den Ann. d. Phys." über die in Frage stehende Buddesche Arbeit gibt, wird ebenfalls nur von der „Küstnerschen Theorie" gesprochen und ferner mit Budde davon, daß ich einen Zusammenhang zwischen Schalldruck und Kombinationstönen „vermutet" hätte, während ich meines Erachtens diesen Zusammenhang klar bewiesen habe. Ich nehme an, daß Herr Lübcke die Buddesche Ausdrucksweise ohne Nachprüfung ihrer Berechtigung übernommen und nicht die Absicht gehabt hat, sich mit der in ihr enthaltenen Kritik zu identifizieren. Sollte jedoch das Gegenteil der Fall sein, so möchte ich Herrn Lübcke um eine Begründung seiner Stellungnahme bitten. Jedenfalls ist meines Erachtens die Darstellung in seinem Referat nicht zutreffend und irreführend.

gesamten auf die feste Wand wirkenden Kraft muß man sich nun darüber klar sein, daß die Rayleighsche Druckkraft additiv zu den Druckschwankungen von der Periodenzahl m hinzutritt. Auf die feste Wand wirkt also nicht eine Kraft von der Form $f \sin 2\pi m t$, sondern eine Kraft von der Form $f \sin 2\pi m t + D$, worin D zunächst den konstanten (Rayleighschen) Schalldruck bedeutet.

Die Richtigkeit dieses Ansatzes ist nicht nur von Budde in seiner oben zitierten Arbeit, sondern auch mündlich von anderen Fachgenossen bestritten worden. Weil der Rayleighsche Schalldruck ein Mittelwert über unendlich lange Zeit oder eine volle Periode sei, dürften in der Berechnung der auf die feste Wand wirkenden Kraft neben dem Rayleighschen Schalldruck nicht noch periodische Glieder angesetzt werden. Ich vermag die Berechtigung dieses Einwandes nicht einzusehen, sondern halte ihn für unzutreffend. Denn meine Fragestellung lautet: Welches ist die Gesamtkraft, die auf die feste Wand wirkt, während Rayleigh nur nach einem etwa vorhandenen konstanten Überdruck fragt. Durch seine Rechnung kann also niemals die Gesamtkraft gefunden werden. Deshalb müssen in dem Kraftansatz zu dem Rayleighschen Druckwert noch periodische Glieder hinzugefügt werden, und zwar, solange man nichts Näheres weiß, zunächst nur ein Glied mit der primär gegebenen Periodenzahl m.

Oder mit anderen Worten: Primär gegeben sind die Schwingungen der Schallquelle (Platte) und damit periodische Druckschwankungen an der festen Wand. Ferner wirkt nach Rayleigh auf die feste Wand ein konstanter Überdruck. Wie derselbe zustande kommt, ist eine Frage für sich und braucht uns vorläufig im einzelnen nicht zu kümmern. Sicher ist, da es sich um die Druckberechnung auf eine feste Wand handelt, daß nicht etwa die Art des reagierenden Apparates die periodischen Druckschwankungen in einen einseitigen Überdruck umwandelt. Also wirken — entsprechend meinem Ansatz — beide Größen gleichzeitig.

Es bleibt aber ferner zunächst wenigstens die Möglichkeit offen, daß die tatsächlich wirkenden Druckschwankungen auch harmonische Obertöne der primär gegebenen Schwingungen enthalten. Wenn derartige periodische Druckkomponenten mit den Periodenzahlen $\frac{1}{2m}, \frac{1}{3m}, \ldots$ auch wirklich vorhanden wären, so müßten sie bei der Rayleighschen Art der Herleitung des Schalldruckes ebenso wie der Primärton verborgen bleiben, da ja ein Mittelwert über die Zeit $\frac{1}{m}$ gebildet wird. Ihr Nichterscheinen bei Rayleigh spricht also nicht gegen ihre Existenz. Jedem, der sich mit der Entstehung von Einseitigkeiten, Obertönen (O. T.) und K. T. bei Schwingungen und Wellen beschäftigt hat, wird die besprochene Möglichkeit, daß die gleichen Bedingungen, die zur Entstehung des Rayleighschen Schalldruckes führen, auch O. T. der Primärschwingungen ergeben, von vornherein zur Wahrscheinlichkeit. Demgemäß habe ich auch in meiner ersten Mitteilung[1]) für den Fall, daß primär eine Sinusschwingung gegeben ist, gesagt: „Es werden freilich die periodischen Druckschwankungen derartige sein, daß sie neben dem einseitigen Überdruck und dem ursprünglichen Ton noch dessen Obertöne geben. Ein experimenteller Anhaltspunkt für diese Annahme liegt aber bisher nicht vor".

Ohne exakte Berechnung des zeitlichen Druckverlaufes dürfte es nicht möglich sein, die besprochene Wahrscheinlichkeit der Entstehung von O. T. zur Sicherheit zu erheben. Dagegen ist es möglich, ohne ausführliche Rechnung die Entstehung eines K. T. bei Vorhandensein des Rayleighschen Schalldruckes zu beweisen, und zwar die Entstehung eines Differenztones (D. T.) erster Ordnung, und das war der Hauptinhalt meiner ersten Arbeit. Sind nämlich primär statt des bisherigen einfachen Tones m zwei Töne m und n gegeben, welche gleiche Amplituden haben und deren Schwingungszahlen sich nur sehr wenig voneinander unterscheiden, so entstehen typische Schwebungen. Ist der größte gemeinsame Teiler von m und n noch gleich der Schwebungsanzahl, so ist die strenge Periode der Resultierenden gleich $\frac{1}{m-n}$. Bei genügend kleinem $m-n$ kann aber für unsere Zwecke praktisch als die Dauer einer Periode der Resultierenden schon die viel kürzere Zeit $\frac{2}{m+n}$ angesetzt werden. Nur an der Stelle des Minimums tritt eine einzige Schwingung auf, deren Periode halb so groß ist wie die aller übrigen Schwingungen, was für unsere Betrachtung aber nicht stört[2]).

Der Kunstgriff, den ich anwende, um die gleichzeitige Entstehung von K. T. bei Vorhandensein des Rayleighschen Schalldruckes in,

1) Waetzmann I, l. c.

2) Wer sich über diese Fragen näher zu unterrichten wünscht, sei auf meine Arbeiten: „Über den Zusammenklang zweier einfachen Töne" und „Über Schwebungen" verwiesen, diese Zeitschr. 12, 231, 1911; 18, 560, 1917.

wie mir scheint, sehr einfacher und physikalisch durchsichtiger Weise zu zeigen, ist also folgender: Ich gehe von Primärschwingungen aus, die eine derartige Form haben, daß statt der theoretisch strengen Periode $\frac{1}{m-n}$ praktisch die viel kürzere Zeit $\frac{2}{m+n}$ als Periode angenommen werden darf. Es wird dann mit Schwingungen von der Schwingungszahl $\frac{m+n}{2}$ und von variabler Amplitude operiert[1]). Denke ich mir nun den Schalldruck für eine solche Periode nach Rayleigh berechnet, so ändert sich der gefundene Wert von Periode zu Periode, und zwar ist er periodisch nach $m-n$, da die Amplitude der Resultierenden

$$A \cos 2\pi \frac{m-n}{2} t$$

ist. Die gesamte auf die Wand am Ende des Kundtschen Rohres wirkende Kraft kann ich jetzt also in der Form

$$f \sin 2\pi mt + g \sin 2\pi nt + D$$

schreiben, wo D aber nicht mehr konstant, sondern periodisch nach $m-n$ ist, also allgemein in einer Fourierschen Reihe darstellbar ist, deren konstantes Glied der Rayleighsche Schalldruck, deren erstes periodisches Glied der D. T. erster Ordnung ist, und deren Glieder mit den Periodenzahlen m und n schon herausgenommen sind. Da ich hierbei für die zunächst notwendige Berechnung des „Schalldruckes" über die Zeit $\frac{2}{m+n}$ gemittelt habe, müssen natürlich sämtliche Töne verborgen bleiben, deren Schwingungszahlen gleich $\frac{m+n}{2}$ oder Vielfache davon sind. Dagegen scheint mir die Tatsache, daß, wenn Rayleighscher Schalldruck vorhanden ist, auch K. T. entstehen müssen (woraus auch wieder rückwärts auf die Entstehung von O. T. geschlossen werden kann), bei meiner Art der Herleitung besonders klar ins Auge zu springen. Man könnte in dem skizzierten Gedankengange auch noch weiter gehen, worauf ich jedoch absichtlich verzichtet habe.

Man könnte ferner daran denken, den Schalldruck etwas anders zu definieren als es der Rayleighschen Arbeit entspricht und bisher üblich ist; etwa als den mittleren Druck über Zeiten, die klein sind gegen die Beobachtungszeiten. Dann können in dem Schalldruck neben einem konstanten Anteil — dem Rayleighschen Wert — auch noch zeitlich veränderliche Komponenten auftreten. Beispielsweise würde in dem von uns besprochenen Falle, wie ich auch schon in meiner ersten Mitteilung auseinandergesetzt habe, der so definierte Schalldruck periodisch nach $m-n$ sein. Für die klare Erkenntnis der physikalischen Vorgänge hat diese Definition zweifellos ihre Vorzüge; im wesentlichen ist die ganze Frage aber eine Frage der Darstellungsweise und des Geschmacks. Nur möchte ich davor warnen, auf Widersprüche gegen Rayleigh zu schließen, wo ich in Wirklichkeit die herrschenden — übrigens recht unklaren — Vorstellungen ergänzt und weitergebildet habe.

§ 2. Über die Glieder höheren Grades in den hydrodynamischen Gleichungen. Den Ausgangspunkt der Küstnerschen Überlegungen bilden seine Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{2 \partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \\ + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

und

$$P - a^2 \log\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2. \quad (8)$$

Hierin bedeutet P die Potentialfunktion der äußeren Kräfte, p den hydrodynamischen Druck, a die Schallgeschwindigkeit und Φ das Geschwindigkeitspotential, so daß $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ist, wobei u die Geschwindigkeit parallel der x-Achse bedeutet. Der Einfachheit halber wird der isotherme Fall behandelt, so daß $p = a^2 h$ angenommen ist, worin h die Dichte bedeutet. Unter der in der Akustik üblichen Annahme, daß die Größen P und Φ nebst ihren Ableitungen unendlich kleine Größen höherer Ordnung sind, deren Produkte, Quadrate und noch höhere Potenzen vernachlässigt werden können, und unter der weiteren Annahme, daß keine äußeren Kräfte wirken, reduzieren sich (10) und (8) auf die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

und

$$\log\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (14)$$

bzw.

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}}. \quad (20)$$

1) Ich möchte betonen, daß die hier benutzten Überlegungen meinen Vorstellungen über die exakte Ableitung von Schwebungstönen, wie ich sie in den zitierten Arbeiten entwickelt habe, nicht widersprechen.

Unter Hinzunahme von gewissen Randbedingungen lassen sich nun Φ und damit aus Gleichung (20) p berechnen. Wird hierbei in der Reihenentwicklung, entsprechend der Voraussetzung, daß $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ unendlich klein ist, mit dem ersten Gliede abgebrochen, so resultieren nur der Normaldruck p_0 und Druckkomponenten von den primär gegebenen Perioden. Wird dagegen in der Reihenentwicklung das quadratische Glied noch mitgenommen, so resultieren neben den eben genannten Größen noch Schalldruck, O. T. und, falls mehrere Primärtöne gegeben sind, auch K. T.

Im letzten Paragraphen seiner Arbeit macht Küstner darauf aufmerksam, daß es inkorrekt erscheint, die quadratischen und höheren Glieder in Gleichung (10) zu streichen, in (14) bzw. (20) dagegen beizubehalten. Es wird dann aber gezeigt, daß die Berücksichtigung der quadratischen Glieder in der Differentialgleichung für Φ den vorher gefundenen Wert für den Schalldruck nicht ändert, womit das erwähnte Bedenken erledigt sei.

Die allgemeine Frage nach der Berechtigung oder Nichtberechtigung der Vernachlässigung der höheren Glieder ist mit der Küstnerschen Argumentation aber nicht genügend geklärt. Zunächst sieht man leicht, daß seine Argumentation nur für die von ihm gestellte Spezialfrage richtig ist, also für die Frage, ob sich der Wert des konstanten Anteiles des „Schalldruckes", also des Rayleighschen Schalldruckes, und zwar an der Stelle $x = 1$ ändert, oder nicht ändert, wenn die höheren Glieder in (10) vernachlässigt werden, oder nicht vernachlässigt werden. Betrachtet man dagegen den Rayleighschen Schalldruck an einer anderen Stelle des Rohres, oder fragt man nach den neu entstehenden Tönen, den O. T. und K. T., so kommt man zu einem anderen Resultat als Küstner. Gerade diese letztere Frage nach den O. T. und K. T. scheint mir besonders wichtig, da sie ja darauf hinausläuft, ob in der Druckkraft der Schallwellen, die auf die Wand wirkt, Komponenten enthalten sein können, welche in dem Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential und damit für die Geschwindigkeit und die Elongationen noch nicht enthalten sind.

Bevor ich hierauf näher eingehe, möchte ich eine kleine Inkorrektheit beseitigen, die sich in der Küstnerschen Behandlung der Druckgleichung für sich genommen findet. Wir schreiben dazu Gleichung (8) noch unter Fortlassung der äußeren Kräfte in der Küstnerschen Form

$$-\frac{a^2}{p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2. \qquad (6)$$

Die Herleitung des Schalldruckes geschieht nun bei Küstner in der Weise, daß in der Reihenentwicklung von (20) das Glied mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2$ noch mitgenommen wird, während das Glied mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2$ in (6) bzw. (14) von vornherein vernachlässigt ist. Das ist bestimmt eine Inkorrektheit, da beide Glieder in der Druckgleichung auftreten und von gleicher Größenordnung sind. Will man jedoch, wie es üblich ist, in Gleichung (6) das Glied mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2$ wirklich vernachlässigen, so müssen in (6) korrekterweise noch andere Glieder vernachlässigt werden. Dazu bringen wir (6) auf eine etwas andere Form, indem wir

$$p = p_0 + p_0 \psi$$

setzen, wo ψ in den Paragraphen 2 und 3 bei Küstner gleich

$$c_1 \cos\frac{n}{a}(x-1)\sin nt$$

wäre. Dabei ist ψ von der gleichen Größenordnung wie $\frac{1}{a^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Setzen wir den angenommenen Wert von p in (6) ein, so ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$-a^2\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial t} + \psi\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \\ + \psi\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2. \qquad (6')$$

Wenn nun die üblichen Vernachlässigungen gemacht werden sollen, so muß neben den Ausdrücken mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2$ auch der Ausdruck $\psi\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial t}$ vernachlässigt werden. Dann folgt aus (6') der Wert

$$\psi = \frac{nA}{a\sin\frac{n}{a}}\cos\frac{n}{a}(x-1)\sin nt,$$

also

$$p = p_0 + p_0\frac{nA}{a\sin\frac{n}{a}}\cos\frac{n}{a}(x-1)\sin nt.$$

Das ist aber genau derselbe Wert, wie ihn Küstner — Gleichung (22) — findet, indem er zunächst in der Druckgleichung (6) bzw. (8) das Glied mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2$ vernachlässigt, und dann zum Schluß in dem expliziten Ausdruck für p (20) nochmals Vernachlässigungen einführt. Wenn aber in dem Endresultat Vernachlässi-

gungen gemacht werden, so ist das natürlich physikalisch ganz anders zu bewerten, als wenn sie in der Ausgangsgleichung gemacht werden.

Das Bedenken, welches Küstner ausspricht, wäre also gar nicht berechtigt, wenn seine Herleitung der Gleichung (20) physikalisch einwandfrei wäre. Da sie das nicht ist, bleibt seine Fragestellung richtig, und wir wollen nun prüfen, wie die Beibehaltung der quadratischen Glieder in der Differentialgleichung für p zu bewerten ist, wenn sie in der Differentialgleichung für Φ fortgelassen werden.

Die Entscheidung muß meines Erachtens auf experimentellem Wege getroffen werden. Kann ich noch entsprechend kleinere Bruchteile des Druckes messen als der Geschwindigkeit und der Elongation, so ist es von vornherein berechtigt, in der Berechnung des Druckes die Genauigkeit weiter zu treiben als in der Berechnung des Geschwindigkeitspotentials, in (8) also die quadratischen Glieder beizubehalten, auch wenn sie in (10) gestrichen werden. Natürlich ist dann aber das hieraus folgende Resultat, daß die Druckkraft Komponenten von solchen Perioden enthält, die in dem Geschwindigkeitspotential noch nicht enthalten sind, nur ein angenähertes; und ebenso würde sich der Gesamtwert für die Druckkraft etwas ändern, wenn die quadratischen Glieder für Φ auch berücksichtigt werden. Das ist kein Widerspruch zu dem auf den ersten Blick gegenteilig erscheinenden Küstnerschen Resultat, denn dieses bezieht sich ja, wie oben auseinandergesetzt worden ist, nur auf eine eng begrenzte Spezialfrage.

Wird dagegen auf die experimentellen Möglichkeiten keine Rücksicht genommen, so sind selbstverständlich etwaige Vernachlässigungen in allen Gleichungen gleichmäßig anzubringen, und man erhält im allgemeinen auch verschiedene Resultate, je nachdem, ob das geschieht oder nicht.

§ 3. Zur Kritik Buddes. In § 2 seiner zitierten Arbeit erklärt Budde, daß ihm mein Gedankengang, wie er in den Arbeiten Waetzmann I und Waetzmann-Moser[1]) dargestellt ist, „prinzipiell unrichtig" zu sein scheine. Ich gebe zu, daß meine Darstellung — wie es aber in dem Charakter einer „ersten Mitteilung" liegt — sehr knapp gehalten ist, und daß deshalb einige Stellen, auf die ich nachher zu sprechen komme, Anlaß zu Mißverständnissen geben können. Andererseits kann ich aber Buddes Kritik nicht beipflichten. In einigen Punkten beruht sie sogar auf groben Irrtümern. Wenn ich also im folgenden die Kritik Buddes zurückweisen muß, so möchte ich gleich vor dem Mißverständnis warnen, als ob ich das Problem des Schalldruckes und der damit im Zusammenhang stehenden Fragen etwa für endgültig geklärt halte. Im Gegenteil bin ich der Ansicht, daß mit meiner Arbeit und der daran anschließenden von Küstner überhaupt erst der Anstoß für die notwendige gründliche Untersuchung der Frage gegeben, und bisher nicht mehr als der erste Schritt hierfür getan ist. Das hat aber mit der Kritik Buddes nichts zu tun.

I. Budde knüpft an die Sätze[1]) an: „Wirkt zunächst eine sinusförmig veränderliche Kraft auf die Platte, so hat man anzusetzen:

$$m\,x'' + k\,x' + a^2\,x = f \sin 2\,\pi\,p\,t, \qquad (1)$$

und man pflegt diese Gleichung als die mathematische Formulierung des Vorganges anzusehen, der sich abspielt, wenn eine einfache Tonwelle auf m auffällt. Da aber, wie bekannt, eine Tonwelle, die auf eine reflektierende Wand auftrifft, neben den periodischen Druckschwankungen noch einen einseitigen Überdruck auf die Wand ausübt, so stellt dieser Ansatz den physikalischen Vorgang nicht vollständig dar. Es ist vielmehr auf der rechten Seite von (1) additiv ein Glied D hinzuzufügen, welches den — in der Berechnung von Rayleigh konstanten — Schalldruck repräsentiert". Hierzu sagt Budde[2]): „Dieser Gedankengang scheint mir prinzipiell unrichtig; denn der Rayleighsche Schalldruck geht — soweit er überhaupt vorhanden ist — erst aus der Schwingungsgleichung (1) (bei Budde Nr. 4) bzw. aus modifizierten Formen derselben hervor. Er besteht also nicht neben der Gleichung (1), sondern Gleichung (1) stellt den ganzen Vorgang einschließlich des Schalldruckes dar, solange man dem schwingenden Punkt eine lineare Differentialgleichung zuschreibt".

Es ist mir nicht gelungen, mit Sicherheit herauszubekommen, was Budde mit diesen Sätzen eigentlich meint. Zum mindesten der erste Satz läßt aber keine andere Deutung zu, als daß Budde meine Gleichung (1) nicht auf die schwingende Wand (m), sondern irrtümlicher Weise auf Teile des die Schallwellen leitenden Mediums (Luft) bezieht. Damit scheint mir dann die Grundlage für alle weiteren Mißverständnisse gegeben. Die auf die obigen Sätze folgenden Ausführungen Buddes sind Wahrheiten, gegen die ich nicht verstoßen habe. Sie enthalten im wesentlichen die

1) E. Waetzmann u. W. Moser, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 13, 1917.

1) Waetzmann I, S. 425.
2) E. Budde, l. c. S. 323.

ausführliche Feststellung, daß der zeitliche Mittelwert einer vollen Periode einer aus zwei Sinusfunktionen additiv zusammengesetzten Funktion gleich Null ist, und Budde scheint anzunehmen, daß ich das nicht gewußt habe. Zu dieser eigenartigen Annahme ist er offenbar durch die Vorstellung verleitet worden, daß ich in meiner Arbeit hätte zeigen wollen, wie der Rayleighsche Schalldruck zustande kommt. Wenigstens vermag ich sonst den Sinn seiner Ausführungen, daß ohne quadratisches Glied in der Druckgleichung der Schallwellen kein Schalldruck entsteht, nicht einzusehen. Es lag aber im Rahmen meiner ersten Mitteilung keine Veranlassung vor, auf die Art der Entstehung des Schalldruckes im einzelnen einzugehen; denn Zweck und Inhalt dieser Arbeit war ja nur der, zu zeigen, daß, wenn Schalldruck vorhanden ist — gleichgültig wie er zustande kommt, — daß dann bei zwei Primärtönen auch K. T. entstehen. Die Feststellung Buddes, mit welcher er seine ablehnende Kritik meiner Arbeit abschließt[1]): Das Gesagte bestätigt den allgemein angenommenen Helmholtz-Cl. Schaeferschen Satz: „Ohne quadratisches Glied liefert die Theorie weder O. T. noch K. T.", ist also von mir garnicht diskutiert, geschweige denn bestritten worden, und ist somit völlig gegenstandslos.

Es würde natürlich zu weit führen, auf alle Einzelheiten der Buddeschen Arbeit einzugehen, deshalb habe ich versucht, das herauszuschälen, was mir der Kernpunkt seiner Kritik zu sein scheint und diesen zu widerlegen; im übrigen verweise ich auf § 1 der vorliegenden Arbeit und auf meine erste Mitteilung.

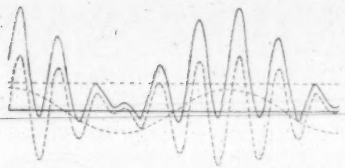
II. Wir kommen jetzt auf einen Punkt, den Budde zwar nicht erwähnt, der aber vielleicht indirekt seine Bedenken mit veranlaßt hat. In § 1 der vorliegenden Arbeit ist durchweg nicht von der „auf die Wand auftreffenden Tonwelle", sondern von der „primär gegebenen Tonschwingung" die Rede. Entsprechend steht an der Spitze meiner ersten Mitteilung der Satz[2]): „Vielleicht können Verzerrungen auch in der Richtung auftreten, daß sinusförmige Komponenten von solchen Perioden entstehen, die „in den Schwingungen der Schallquelle überhaupt noch nicht enthalten sind"[3]). Dagegen wird an anderen Stellen meiner Arbeit, speziell in dem von Budde zitierten Satz, immer kurzweg von der auftreffenden Tonwelle gesprochen. Hierdurch entsteht nun zunächst folgende Möglichkeit zu Mißverständnissen: Unter dem Ausdruck „Tonwelle" kann ja sowohl die Form der Druckschwankungen als auch die Form der Elongationen oder Geschwindigkeiten gemeint sein. Es bedarf wohl keiner näheren Auseinandersetzung, daß in meiner Arbeit nicht die Form der Druckschwankungen gemeint ist, sondern die Form der Verschiebungen. Herr Budde hat aber anscheinend ersteres angenommen. Allerdings möchte ich betonen, daß meines Erachtens für den aufmerksamen Leser die Möglichkeit dieses Mißverständnisses durch den Hinweis darauf ausgeschlossen wird, daß die „Druckschwankungen" in der auftreffenden Tonwelle derartige sein werden, daß sie „neben dem einseitigen Überdruck und dem ursprünglichen Ton noch dessen O. T. geben"[1]).

Dagegen kann gegen die obige Ausdrucksweise mit Recht eingewendet werden, daß die strenge Theorie auch schon für Φ O. T. gibt und nicht erst für p (vgl. § 2). Zur Beurteilung und Erledigung dieses Einwandes, der übrigens von Budde nicht erhoben worden ist, brauche ich nur auf § 2 der vorliegenden Arbeit zurückzuverweisen, wo diese Frage ausführlich behandelt ist.

III. Die Art, wie Budde auf die Arbeit Waetzmann-Moser[2]) eingeht, muß auf das entschiedenste zurückgewiesen werden. Herr Budde hat die Arbeit allem Anschein nach nicht einmal vollständig gelesen. Dementsprechend schweben seine Bemerkungen nicht nur in der Luft, sondern müssen den nicht genau informierten Leser auch völlig irreführen. Zur Begründung der Schärfe in der Zurückweisung der Buddeschen Kritik folgendes: Zunächst nimmt Budde offenbar an, daß unsere Kurven die Wirkung des Schalldruckes darstellen sollen, obwohl sie hiermit gar nichts zu tun haben, sondern — wie klipp und klar in unserer Arbeit zu lesen ist — ihre Form einem unsymmetrischen Kraftgesetz der Gummihaut oder dgl. verdanken. Neben diesem Grundirrtum findet sich die Bemerkung[3]): „Ob die Kurven der Fig. 3 K. T. enthalten, ist fraglich". Und diese Bemerkung macht Budde, trotzdem wir das Amplitudenverhältnis der K. T. und der Primärtöne für die Kurven b, c und d der Fig. 3 quantitativ angeben, und trotzdem wir als Kurve a absichtlich eine Schwingungskurve abgebildet haben, die jedem, der im Lesen von Kurven auch nur etwas Erfahrung besitzt, auch ohne Analyse auf den ersten Blick das Vorhandensein eines D. T. zeigt.

1) E. Budde, l. c. S. 324.
2) Waetzmann I, S. 425.
3) Auch im Original gesperrt gedruckt.

1) Waetzmann I, S. 430.
2) E. Waetzmann u. W. Moser, l. c.
3) E. Budde, l. c., S. 323.



Man kann sich das leicht mit Hilfe von Fig. 1 der vorliegenden Arbeit klar machen. Die ausgezogene Kurve ist die Resultierende aus den beiden Tönen mit den relativen Schwingungszahlen 5 und 6, ihrem D. T. erster Ordnung und einer einseitigen Verschiebung. Die Amplituden stehen im Verhältnis 15 : 15 : 12 : 15. Nähere Auseinandersetzungen dürften überflüssig sein.

Jedenfalls hätte Herr Budde, ehe er die Resultate unserer Analyse anzweifelt, die Pflicht gehabt, dieselben nachzuprüfen. Statt dessen wird durch eine völlig aus der Luft gegriffene Behauptung unsere Arbeit für jeden nicht genau informierten Leser diskreditiert.

Zusammenfassung. In meiner ersten Mitteilung stand ebenso wie in der vorliegenden weder die Art der Entstehung des Rayleighschen Schalldruckes zur Erörterung, noch die Art der Entstehung von K. T. für sich genommen. Vielmehr ist der Hauptinhalt dieser Arbeiten die neue und wie mir scheint wichtige Erkenntnis des innigen Zusammenhanges zwischen Rayleighschem Schalldruck einerseits und der Entstehung von O. T. und K. T. andererseits. Auch in der Arbeit Waetzmann-Moser ist als der wesentliche Inhalt meiner ersten Mitteilung die Erkenntnis dieses Zusammenhanges angegeben worden, mit den Worten[1]): „Zunächst zeigte der eine von uns, daß auch bei symmetrischem Kraft- und Dämpfungsgesetz für einen frei schwingenden Körper die erzwungenen Schwingungen desselben unsymmetrisch werden und K. T. in ihm entstehen können, wenn die Bedingungen dafür gegeben sind, daß der Schalldruck merklichen Einfluß erhält". Über weitere Folgerungen aus dieser Erkenntnis sowie über ihre experimentelle Bestätigung hoffe ich in absehbarer Zeit berichten zu können. Ebenso über einige auf der kinetischen Gastheorie beruhende Überlegungen über den Schalldruck für sich genommen. Untersuchungen auf diesem Wege erscheinen mir besonders erwünscht, nachdem mich Herr Prof. Cl. Schaefer auf schwerwiegende Bedenken gegen die Rayleighsche Art der Herleitung des Schalldruckes aufmerksam gemacht hat. Den Inhalt der vorliegenden Arbeit möchte ich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Ausführungen meiner ersten Mitteilung über den Zusammenhang zwischen Schalldruck und K. T. werden ergänzt.

2. Im Anschluß an die Küstnersche Untersuchung über den Schalldruck werden einige Bemerkungen über die Vernachlässigung der Glieder höheren Grades in den hydrodynamischen Gleichungen gemacht.

3. Die Kritik Buddes an meiner ersten Mitteilung wird zurückgewiesen, dabei aber betont, daß das Problem des Schalldruckes sowie die mit ihm im Zusammenhang stehenden Fragen längst noch nicht geklärt sind.

Breslau, Physikalisches Institut, September 1919.

(Eingegangen 20. September 1919.)

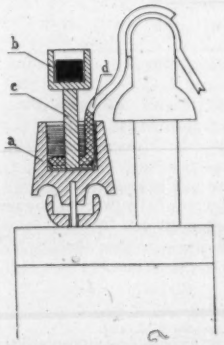
1) E. Waetzmann u. W. Moser, l. c. S. 14.

Eine Verbesserung der Zehnderschen Hochspannungsakkumulatoren.

Von H. Haga.

Mancher Untersucher hat schon üble Erfahrungen gemacht mit den von Klingelfuß gelieferten Zehnderschen Hochspannungsakkumulatoren; man sehe z. B. E. Wagner, Ann. d. Phys. 57, 410, 1918.

Auch bei der im hiesigen Institut sich befindenden Batterie kroch schon nach kurzer Zeit das Quecksilber an den Endplatten empor, wodurch diese ganz brüchig wurden, wiewohl die Gebrauchsanweisungen genau befolgt wurden. Dies veranlaßte mich zu folgender Änderung, wodurch der genannte Übelstand ganz beseitigt wurde.



Die Figur zeigt die Anordnung in halber Größe.

Ein starker Eisendraht, *c*, trägt oben ein eisernes Quecksilbernäpfchen, *b*, und hat unten als Fuß ein Metallscheibchen, womit er leitend verbunden ist. Auf diesem Scheibchen und um den Eisendraht ist der an die Endplatte gelötete Bleidraht, *d*, gelötet.

Die untere Hälfte des Eisendrahtes ist im Porzellannäpfchen *a* mit Wachskolophoniumkitt befestigt.

Die bei der Batterie mitgelieferten Bügel zum Laden können ohne weiteres benutzt werden.

Physikalisches Institut Universität Groningen.

(Eingegangen 26. September 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Metallographie.

Von Rudolf Ruer.

(Schluß.)

2. Das metastabile System Eisen-Kohlenstoff.

Das Charakteristische des durch Fig. 41a dargestellten Schmelzdiagramms des metastabilen Systems Eisen-Kohlenstoff besteht darin, daß Eisen und Kohlenstoff eine (nicht vollkommen stabile) Verbindung von der Formel Fe_3C (= 6,7 Proz. Kohlenstoff) miteinander bilden. Dieses Eisenkarbid, von den Metallurgen Zementit genannt, besitzt im kristallisierten Zustande kein Lösungsvermögen für Eisen. Es zeigt große Härte und Widerstandsfähigkeit gegen Ätzmittel, so daß es durch Behandeln mit verdünnten Säuren in der Kälte von leicht angreifbaren Beimengungen getrennt werden kann. Beim Erwärmen löst es sich in Säuren unter Entwicklung von Wasserstoff und Kohlenwasserstoffen auf. An seiner Existenz ist seit den Untersuchungen von Mylius, Förster und Schöne[1]) nicht mehr zu zweifeln.

Zur näheren Erläuterung des Schmelzdiagramms Fig. 41a diene folgendes. Der Schmelzpunkt des reinen Eisens ist mit *A*, der δγ-Umwandlungspunkt mit *G* bezeichnet. Die primäre Ausscheidung des Eisens findet längs des Kurvenastes *AB* in Form von δ-Mischkristallen, längs des Kurvenastes *BC* in Form von γ-Mischkristallen statt, deren Zusammensetzung durch die entsprechenden Stücke *AH* und *JE* der

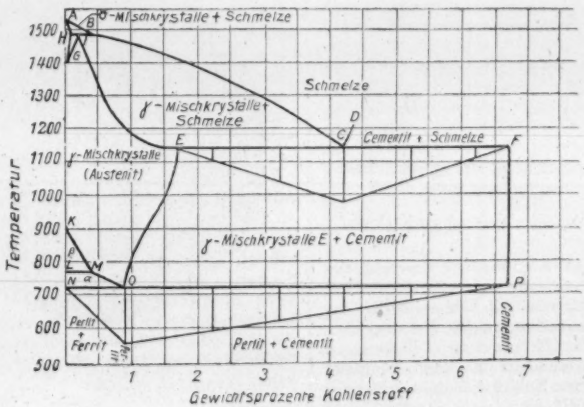


Fig. 41a. Das metastabile System Eisen-Kohlenstoff.

1) Mylius, Förster und Schöne, Zeitschr. f. anorg. Chem. 13, 38, 1896.

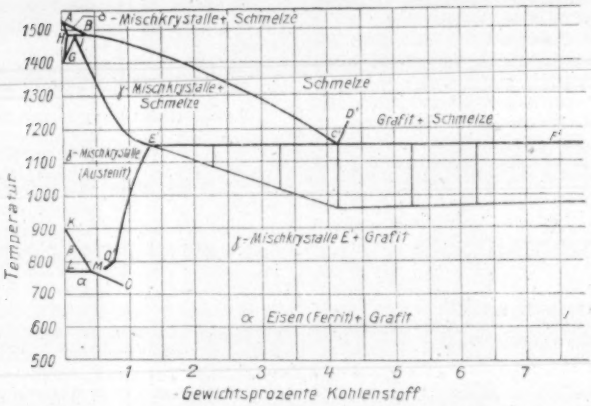


Fig. 41b. Das stabile System Eisen-Kohlenstoff.

s-Kurve angezeigt wird. Der merkwürdig flache Verlauf des unteren Teiles der Kurve *JE* ist von Gutowsky[1]) durch die Untersuchung der Struktur von Legierungen verschiedener Kon-

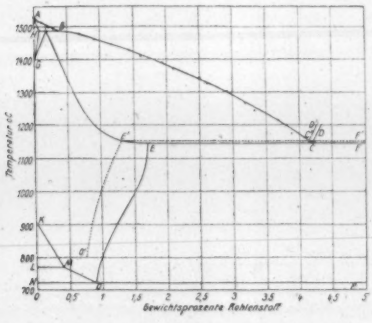


Fig. 41c. Das vollständige System Eisen-Kohlenstoff.

zentration, die in der Nähe der Temperatur der beginnenden Schmelzung abgeschreckt wurden, ermittelt. Das Kurvenstück *GH* stellt den Beginn der δγ-Umwandlung beim Erkalten dar, deren Temperatur durch geringen Kohlezusatz sehr stark erhöht wird. Es mündet im Punkte *H* bei etwa 0,1 Proz. Kohlenstoff und 1487° C[2]) in die *s*-Kurve *AH* ein. Die bei 1487° C verlaufende Horizontale vollständigen Gleichgewichts *HJB* zwischen δ-Mischkristallen *H*, γ-Mischkristallen *J* und Schmelze *B* erstreckt sich von etwa 0,1—0,4 Proz. Kohlenstoff[1]). Das Kurvenstück *GJ* der beendeten δγ-Umwandlung beim Erkalten hat für diese Umwandlung dieselbe Bedeutung, wie die *s*-Kurve für den Übergang aus dem geschmolzenen in den kristallisierten Zustand. Aus Schmelzen mit weniger als *H* = ca. 0,1 Proz. Kohlenstoff scheiden sich zunächst δ-Mischkristalle aus, welche sich nach erfolgter Erstarrung längs *GH* in γ-Mischkristalle umwandeln. In Legierungen mit *H* (= ca. 0,1) Proz. Kohlenstoff bis *B* (= ca. 0,4) Proz. Kohlenstoff wandeln sich die aus der erstarrenden Schmelze zuerst ausgeschiedenen δ-Mischkristalle, welche unter der Voraussetzung vollständigen Konzentrationsausgleichs bei 1487° C sämtlich die Zusammensetzung *H* haben, durch Umsatz mit der Schmelze *B* zu γ-Mischkristallen von der Zusammensetzung *J* um.

Die primäre Ausscheidung des Zementits wird durch den Kurvenast *CD* angedeutet und erfolgt, wie erwähnt, in reiner Form. Die Konzentration des Punktes C liegt bei 4,2 Proz. C[2]), seine Temperatur bei 1145° C[3]). Als Gefügebestandteil der erstarrten Legierungen werden die γ-Mischkristalle, deren Konzentration zwischen Null und *E* = 1,7 Proz. C[4]) variieren kann, Austenit genannt.

1) Gutowsky, Metallurgie **6**, 731, 1909.
2) Ruer und Klesper, loc. cit.

1) Ruer und Klesper, loc. cit.
2) Benedicks, Metallurgie **3**, 393, 1906.
3) Ruer u. F. Goerens, Ferrum **14**, 161, 1917.
4) Gutowsky, Metallurgie **6**, 731, 1909.

Ist die Kristallisation auf der Horizontalen ECF beendet, so ist die Legierung vollkommen erstarrt und besteht aus einem Gemenge von gesättigten Mischkristallen von der Konzentration E, also den kohlenstoffreichsten Austenitkristallen einerseits, und aus Kristallen von der Konzentration F, den reinen Zementitkristallen andererseits. Welcher der beiden Bestandteile zuerst ausgeschieden ist, ergibt sich aus dem Diagramm. Die relative Menge des Zementiteutektikums C ist durch Senkrechte auf der Horizontalen ECF angegeben. Fig. 42 gibt die Struktur einer untereutektischen, d. h. weniger als 4,2 Proz. Kohlenstoff enthaltenden, Fig. 43 die einer übereutektischen Eisen-Kohlenstofflegierung, deren Erstarrung nach dem metastabilen Systeme stattgefunden hat. Die Ätzung ist in beiden Fällen durch Pikrinsäure erfolgt. Man erkennt in Fig. 42 die primär ausgeschiedenen, durch das Ätzmittel angegriffenen Eisenmischkristalle, die ihrer Anordnung wegen häufig als Tannenbaumkristalle bezeichnet werden, in Fig. 43 die primär ausgeschiedenen Zementitnadeln, in beiden Fällen umgeben von Zementiteutektikum C, für das Wüst[1]) den Namen Ledeburit vorgeschlagen hat.

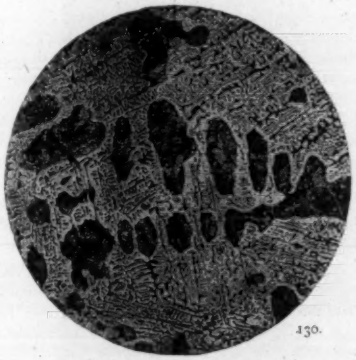


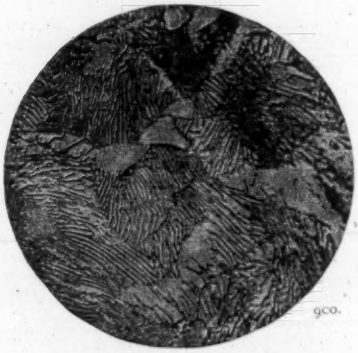
Fig. 42. Weißes Roheisen mit 3,5 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Tannenbaumkristalle (dunkel), Zementiteutektikum (Ledeburit).

Fig. 43. Weißes Roheisen mit 5,25 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Zementit (hell), Zementiteutektikum (Ledeburit).

Bei sinkender Temperatur nimmt das Lösungsvermögen des Eisens für Zementit ab. Es findet demnach längs des Kurvenastes EO Ausscheidung von Zementit statt. Der ausgeschiedene Zementit ändert seine Zusammensetzung nicht, was durch die Vertikale FP angedeutet ist. Der γβ-Umwandlungspunkt des reinen Eisens ist mit K, der βα-Umwandlungspunkt mit L bezeichnet. Nun besitzen α- und β-Eisen im Gegensatz zu γ- und δ-Eisen kein merkliches Lösungsvermögen für Kohlenstoff. Da sich also die β-Kristalle aus der hier allerdings festen Lösung von Kohlenstoff in Eisen rein ausscheiden, so muß ihre Ausscheidungstemperatur, mit anderen Worten die Umwandlungstemperatur des γ-Eisens in β-Eisen, mit steigendem Kohlenstoffgehalt längs KM sinken, und zwar bis zur Temperatur $L = 769°$ C, bei der die reinen β-Kristalle in die α-Kristalle übergehen. Es findet demgemäß bei Konzentrationen zwischen L und M ein Stabilitätswechsel statt, indem die bis dahin ausgeschiedenen reinen β-Kristalle bei der Temperatur der Horizontalen LM in die nunmehr stabile α-Form übergehen. Der Umstand, daß sich von jetzt an aus der festen Lösung von Kohlenstoff in γ-Eisen sofort α-Eisen ausscheiden muß, gibt sich durch eine plötzliche Richtungsänderung der Kurve in M zu erkennen. Die Konzentration des Punktes M beträgt nach Bardenheuer[2]) 0,41 Proz. C. Im Schnittpunkte O der Kurven KMO und EO treffen wir auf Verhältnisse, die der eutektischen Kristallisation ganz analog sind. Die hier feste Lösung von Kohlenstoff in γ-Eisen (= Austenit) ist bei dieser Temperatur sowohl mit Zementit, wie mit α-Eisen gesättigt. Es findet daher bei Wärmeentziehung gleichzeitig Ausscheidung beider Kristallarten in einem solchen Verhältnisse statt,

1) Wüst, Metallurgie 6, 512, 1909.
2) Bardenheuer, Ferrum 14, 129, 1917.

daß dadurch die Konzentration der festen Lösung nicht geändert wird. Die Temperatur bleibt solange konstant, bis der Austenit von der Konzentration O vollkommen in ein eutektisches Gemisch aus α-Eisen und Zementit umgewandelt ist. Das Eutektikum, welches eine schön lamellare Struktur aufweist, führt den Namen Perlit. Die Konzentration des Punktes O ist zu 0,9 Proz. C bestimmt worden. Wie schon Osmond[1]) fand, zeigt die Perlitumwandlung eine besonders starke Hysteresis, deren Betrag von verschiedenen Umständen abhängig ist. Durch Berücksichtigung dieser Umstände gelang es, sie auf 6° C zu ermäßigen und die Gleichgewichtstemperatur der Umwandlung mit einem Fehler von + 3° C zu 721° C zu bestimmen[1]). Die relative Menge des Perlits ist durch Senkrechte auf der Horizontalen NOP angegeben. Falls die Kristallisation in der beschriebenen Weise stattfindet, so besteht die erkaltete Legierung bei Konzentrationen von 0—0,9 Proz. C aus Ferrit (α-Eisen) und Perlit (Fig. 44), von 0,9 Proz. C aus Perlit, von 0,9—6,7 Proz. C aus Zementit und Perlit. (Fig. 45, vgl. auch Fig. 42, die bei der Ausscheidung homogenen Tannenbaumkristalle sind bei der Abkühlung in Zementit und Perlit zerfallen.)



900.

Fig. 44. Eisen mit 0,64 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Ferrit (hell), Perlit (lamellar).

900.

Fig. 45. Eisen mit 1,40 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Zementit (hell), Perlit (lamellar).

Nun ist es durch genügend schnelle Abkühlung möglich, die auf $KMOE$ stattfindenden Reaktionen zu verhindern. Dadurch hat man es in der Hand, noch instabilere Zustände zu realisieren, als unser Diagramm wiedergibt.

3. Das stabile System Eisen-Kohlenstoff.

Auch in dem durch das Diagramm Fig. 41b dargestellten stabilen System scheidet sich das Eisen bei Konzentrationen zwischen 0 und C' längs der Schmelzkurve ABC' primär in Form von Mischkristallen aus, deren Zusammensetzung durch die Stücke AH und JE' der s-Kurve angegeben ist. Der Verlauf dieser, sowie der die γδ-Umwandlung betreffenden Kurven ist der gleiche, wie der der entsprechenden Kurven im metastabilen System (Fig. 41a). Dagegen findet die primäre Ausscheidung des Kohlenstoffs aus der Schmelze im stabilen System nicht in Form von Zementit, sondern in Form von Graphit statt. Dies wird durch den Kurvenast $C'D'$ wiedergegeben, der oberhalb des Kurvenastes CD verlaufen muß. Die Konzentration des Graphiteutektikums C' liegt bei 4,15 Proz. Kohlenstoff, seine Temperatur bei 1152° C[1]). Die Konzentration des mit Graphit gesättigten stabilen Mischkristalls E' entspricht 1,3 Proz. Kohlenstoff[2]). Ist die Temperatur bis zu der Horizontalen $E'C'F'$ (= 1152° C) gefallen, so kristallisiert alles, und die Legierung besteht nach vollendeter Kristallisation bei Konzentrationen von 0 bis E' Proz. C nur aus Mischkristallen, die bei idealem Kristallisationsverlauf alle die durch die Zusam-

1) Osmond, Transformations du fer et du carbone dans les fers, les aciers et les fontes blanches, Paris 1888.

1) Ruer und F. Goerens, Ferrum 14, 161, 1917.
2) Ruer und F. Goerens, Ferrum 14, 161, 1917.

mensetzung der ursprünglichen Legierung gegebene Zusammensetzung haben. Bei höheren Konzentrationen besteht die Legierung aus zwei Bestandteilen, nämlich den gesättigten Mischkristallen E' einerseits und Graphit andererseits, von denen je nach der Konzentration der eine oder andere Bestandteil sowohl primär, als auch im Eutektikum auftritt. Die relativen Mengen des Eutektikums „Mischkristalle E'. Graphit" sind in bekannter Weise durch Senkrechte auf der Horizontalen $E'C'F'$ angedeutet. Der gesättigte Mischkristall E' scheidet bei weiterer Abkühlung Kohlenstoff, und zwar im stabilen System nicht als Zementit, sondern in reiner Form als sog. Temperkohle aus. Die Temperkohle steht dem Graphit in ihren Eigenschaften sehr nahe und ist wahrscheinlich damit identisch. Die Ausscheidung der Temperkohle wird durch die Kurve $E'O'$ angegeben. Die der $\beta\gamma$- und $\alpha\beta$-Umwandlung entsprechenden Linien KM, LM und MO sind im stabilen System die gleichen wie im metastabilen System. Die Kurve $E'O'$ würde bei kontinuierlicher Verlängerung MO bei etwa 740° C und 0,7 Proz. Kohlenstoff treffen. Das hierdurch entstehende, dem Perlit entsprechende eutektische Gemisch aus Eisen und elementarem Kohlenstoff ist noch nicht nachgewiesen.

Die vollkommen stabilen Eisen-Kohlenstofflegierungen können also unterhalb 740° nur reines Eisen und reinen Kohlenstoff (Graphit und Temperkohle) enthalten. Der vollständige Eintritt des stabilen Zustandes wird jedoch, wie schon erwähnt, durch die Neigung zu Unterkühlungen stets verhindert.

4. Das vollständige System Eisen-Kohlenstoff.

Die so sehr verschiedenen Eigenschaften, die man zwei Eisen-Kohlenstofflegierungen von gleicher Zusammensetzung erteilen kann, finden ihre Erklärung in der verschiedenen Stabilität der Systeme. Diese Mannigfaltigkeit kommt durch die Vereinigung beider Diagramme zum Ausdruck. Fig. 41c gibt (bis zur Konzentration 5 Proz. C und unter Weglassung einiger störender Einzelheiten, wie der Senkrechten auf den eutektischen Geraden) die Vereinigung der beiden Diagramme Fig. 41a u. b zu einem einzigen. Die ausschließlich dem stabilen System angehörenden Linien sind gestrichelt gezeichnet, die dem metastabilen oder beiden Systemen angehörenden voll ausgezogen. Die beiden Diagramme stimmen in bezug auf die Umwandlungspunkte des reinen Eisens A, G, K, L und die Gleichgewichtslinien ABC', AH, JE', GH, GJ, HJB, KM, MO, LM überein. Soweit keine Übereinstimmung stattfindet, müssen die voll ausgezogenen Linien metastabile Zustände darstellen und daher unterhalb der gestrichelten liegen.

Hiernach können in erstarrten Eisen-Kohlenstofflegierungen bei gewöhnlicher Temperatur folgende Bestandteile angetroffen werden:

1. Im vollkommen stabilen Zustande (Fig. 41b): reines α-Eisen (= Ferrit) zusammen mit Graphit (bzw. Temperkohle).
2. Im metastabilen Zustande (Fig. 41a):
   a) Ferrit mit Perlit,
   b) Perlit allein,
   c) Perlit und Zementit.
3. Im wenig stabilen Zustande, d. h. wenn auch die Kurve $KMOE$ übersprungen wird, Austenit, d. h. eine feste Lösung von Kohlenstoff in γ-Eisen, ev. zusammen mit Zementit.
4. Es treten noch Gefügebestandteile auf, die als Zwischenstufen der unter 2 und 3 angeführten Gefügebestandteile anzusehen sind. Ordnet man sie nach zunehmender Stabilität, so ergibt sich folgende Reihenfolge:

(Austenit) — Martensit — Trostit — Sorbit — (Ferrit + Zementit).

Da diese Zwischenzustände keinem definierbaren Gleichgewichtszustande entsprechen, so ist in dem durch Fig. 41c dargestellten Zustandsdiagramm für sie kein Platz.

Durch die Möglichkeit, daß der Stabilitätszustand an verschiedenen Stellen in derselben Legierung ein verschiedener sein kann, daß also die den verschiedenen Stabilitätsgraden entsprechenden Gefügebestandteile nebeneinander und in wechselnder Menge auftreten können, hat man es in der Hand, die Eigenschaften der Eisen-Kohlenstofflegierungen innerhalb weiter Grenzen beliebig zu variieren, ohne ihre Zusammensetzung zu verändern. So besteht der Unterschied zwischen grauem und weißem Roheisen (= Eisen mit mehr als 1,7 Proz. Kohlenstoff) darin, daß ersteres (Fig. 46) Graphit in größerer oder geringerer Menge, letzteres (Fig. 42 u. 43) nur chemisch gebundenen Kohlenstoff enthält. Da der chemisch gebundene Kohlenstoff beim Behandeln mit Säuren stets in Form von Kohlenwasserstoffen frei wird, so darf nur ersteres beim Behandeln mit Säuren einen Rückstand von Kohle hinterlassen.

Enthält das Roheisen kein Silizium, so erstarrt es bis zu einem Kohlenstoffgehalte von

etwa 3 Proz. bei normaler Abkühlung im wesentlichen als weißes Roheisen. Silizium vermindert die Neigung zu Unterkühlungen je nach seiner Menge in größerem oder geringerem Maße. Mangan hat im Gegensatz hierzu die Eigenschaft, die Unterkühlungen zu fördern. Manganhaltige Roheisensorten erstarren

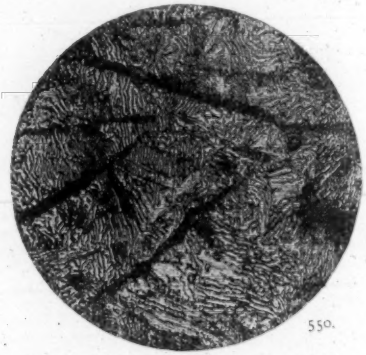


Fig. 46. Graues Roheisen mit 3,5 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Graphit, Perlit.

daher auch noch bei Kohlenstoffgehalten von über 4 Proz. im allgemeinen in Form des weißen Roheisens.

Eisen-Kohlenstofflegierungen mit 1,7 Proz. Kohlenstoff und darunter werden als Stahl, Schmiedeeisen usw. bezeichnet. Die in ihnen stattfindenden Umwandlungen erfolgen auch bei langsamer Abkühlung nach dem metastabilen System. Trotzdem ist, wie das Diagramm zeigt, in diesem Gebiete die Möglichkeit der verschiedenen Zustände wegen des Auftretens der Kurve *KMOE* eine recht große. Will man ein Eisen von bestimmten Eigenschaften herstellen, so ist hierzu die Kenntnis des Diagramms in Verbindung mit der Kenntnis der Eigenschaften der einzelnen Gefügebestandteile von großem Werte.

Gefügebestandteil	Härte
Ferrit	Weichster Gefügebestandteil.
Zementit	Härtester " "
Perlit	Mittel. " "
Austenit	Wechselnde Härte je nach dem Kohlenstoffgehalt, stets weicher als Zementit.

Will man beispielsweise einem Eisen von bestimmtem Kohlenstoffgehalt, etwa 1 Proz., eine möglichst große Härte erteilen, so ist (s. vorstehende Tabelle) die Entstehung des mittelweichen Perlits zu verhindern und die Legierung demgemäß aus dem Gebiete des Austenits möglichst schnell in das Gebiet geringer Reaktionsgeschwindigkeit überzuführen, in dem eine Umwandlung des Austenits in Perlit und Zementit nicht mehr stattfindet („Härten des Stahls"). Die Temperatur, bei der die schnelle Abkühlung einzusetzen hat, muß oberhalb *KMOE* liegen und ergibt sich bei Kenntnis des Kohlenstoffgehalts ohne weiteres aus dem Diagramm. Setzt man den gehärteten Stahl einer Temperatur von über 200° C aus, so befindet er sich in einem Gebiet, in dem der Zerfall des Austenits in Ferrit und Zementit schon mit merkbarer Geschwindigkeit vor sich geht. Man kann in dieser Weise einem Stahl, dessen Härte das gewünschte Maß übersteigt, eine geringere Härte erteilen („Anlassen des Stahls").

5. Experimenteller Nachweis der Existenz zweier verschiedener Eisen-Kohlenstoffsysteme.

Die Gründe, welche zur Annahme zweier verschiedener Systeme, eines stabilen Graphitsystems und eines metastabilen Zementitsystems geführt haben, waren, wie oben erwähnt, einmal die Beobachtung, daß schnelle Erstarrung die Graphitausscheidung verhindert, langsame sie begünstigt, ferner die Möglichkeit, den in erstarrten Eisen-Kohlenstofflegierungen vorhandenen Zementit durch längeres Erhitzen auf ca. 900° C mit nachfolgender langsamer Abkühlung unter Ausscheidung von elementarem Kohlenstoff zum Teil zu zerlegen. Die durch diese Tatsachen gegebene Begründung konnte, weil indirekter Natur, als zwingend nicht angesehen werden. Ein zwingender Beweis kann nur durch den direkten Nachweis der Existenz der in dem Diagramm (Fig. 41c) angenommenen Doppellinien erbracht werden. Bis vor kurzem war nur die Lage eines Kurvenpaares, nämlich der Verlauf der Kurve *EO* der Löslichkeit des Zementits im festen Eisen[1]) und der Kurve *E'O'* der Löslichkeit des elementaren Kohlenstoffs im festen Eisen[2]) experimentell ermittelt. Da jedoch die Punkte der Kurve *E'O'* nur von einer Seite, und zwar von niederer Temperatur aus bestimmt werden konnten, so ließ sich der Einwand erheben, daß das Gleichgewicht nicht erreicht worden sei und die Werte für die Löslichkeit des elementaren Kohlen-

1) Wark, Metallurgie 8, 704. 1911.
2) Ruer und Iljin, Metallurgie 8, 97, 1911.

stoffes im festen Eisen zu niedrig gefunden seien.

Durch Beobachtung des Verhaltens des Zementiteutektikums bei wiederholter Schmelzung und Erstarrung hat sich der Nachweis der Existenz zweier verschiedener eutektischer Horizontalen ECF und $E'C'F'$ (Fig. 41c) erbringen lassen[1]). Am besten eignet sich dazu eine Legierung mit etwa 2½ Proz. Kohlenstoff, welche auch bei verhältnismäßig langsamer Abkühlung aus dem Schmelzflusse zunächst weiß erstarrt. Die mit einer Legierung dieser Zusammensetzung angestellten Abkühlungs- und Erhitzungsversuche sind in Fig. 47 graphisch dargestellt. Der Erstarrungsbeginn der geschmolzenen Legierung lag bei 1342° C; der Regulus kühlte darauf ziemlich schnell bis 1110° C ab, bei welcher Temperatur die eutektische Kristallisation unter freiwilliger Temperaturerhöhung bis 1127° C einsetzte (Kurve 1). Nachdem der Regulus bis 1029° C abgekühlt war, erfolgte seine Wiedererhitzung bis 1166° C. Auf Kurve 1a, welche diesen Vorgang darstellt, ist der bei 1146° C auftretende Haltepunkt sehr deutlich ausgeprägt. Die hierauf folgende Abkühlung und Wiedererhitzung sind durch die Kurven 2 und 2a dargestellt. Man sieht auf der Erhitzungskurve, daß nach dem ersten wiederum bei 1146° C liegenden Haltepunkt ein schwach ausgeprägter zweiter Haltepunkt auftritt. Bei der dritten Abkühlung und Wiedererhitzung hat sich der obere, bei etwa 1153° C liegende Haltepunkt auf der Erhitzungskurve 3a auf Kosten des unteren so weit verstärkt, daß die Dauer der beiden etwa die gleiche ist. Nach der vierten Erstarrung ist der untere Haltepunkt auf der Erhitzungskurve verschwunden, die Erhitzungskurve 4a läßt nur den oberen bei etwa 1153° C liegenden Haltepunkt erkennen. Von da ab bringt weitere Erstarrung und Wiedererhitzung keine Veränderung der Erhitzungskurven mehr hervor. Während die Erhitzungskurven die oben beschriebene Änderung erleiden, bleiben die Abkühlungskurven von der zweiten Erstarrung an ziemlich unverändert und weisen einen

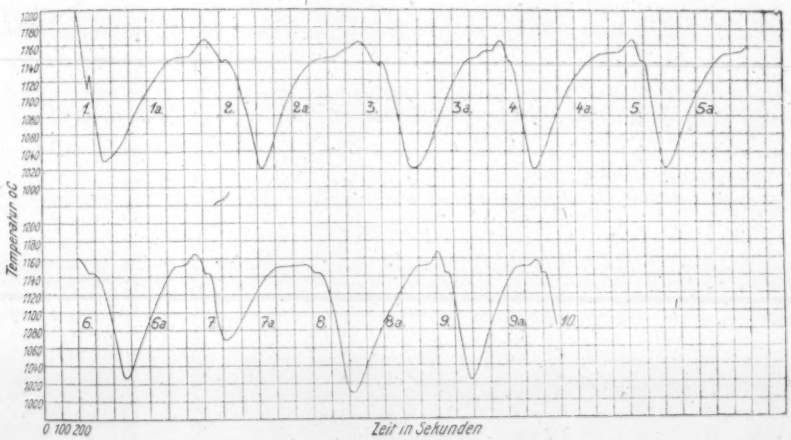


Fig. 47.

innerhalb weniger Grade schwankenden Haltepunkt bei etwa 1144° C auf.

Die Untersuchung der Struktur der erstarrten Reguli ergab, daß der auf den ersten Erhitzungskurven auftretende, bei 1146° C liegende Haltepunkt der Schmelzung des Zementiteutektikums entspricht. Bei der wiederholten Erhitzung und Abkühlung geht das Zementiteutektikum allmählich vollständig in das Graphiteutektikum über; in dem Maße, in dem dieses geschieht, vermindert sich die Dauer des der Schmelzung des Zementiteutektikums entsprechenden Haltepunkts bis zum völligen Verschwinden; dafür erscheint und verstärkt sich in gleichem Maße der bei 1153° C liegende Haltepunkt, welcher der Schmelzung des Graphiteutektikums entspricht.

Die beobachtete Lage der beiden Haltepunkte auf der Erhitzungskurve — 1146° C

1) Ruer u. F. Goerens, Ferrum 14, 161, 1917.

für den unteren und 1153° C für den oberen — liefern eine obere Grenze für die wahren, d. h. dem Gleichgewicht entsprechenden Schmelzpunkte des Zementit- und Graphiteutektikums. Eine untere Grenze ließ sich mit Hilfe geeigneter Abkühlungskurven ermitteln, sie lag in beiden Fällen 2° C unter der oberen Grenze. In Anbetracht der Geringfügigkeit dieses Unterschiedes ergeben sich als Gleichgewichtstemperaturen für die Schmelzung und Erstarrung die Mittelwerte der entsprechenden Grenztemperaturen: 1145° C für das Zementiteutektikum und 1152° C für das Graphiteutektikum.

Diese beiden eutektischen Schmelztemperaturen können jede einzeln und auch zusammen auftreten, je nachdem die vorhergehende Erstarrung des Eutektikums nur nach dem Zementitsystem oder nur nach dem Graphitsystem oder nach beiden Systemen gleichzeitig erfolgt ist. Damit ist der Nachweis zweier voneinander unabhängiger, d. h. zu zwei verschiedenen Systemen gehörender eutektischer Temperaturen erbracht.

Ein weiteres Resultat dieser Untersuchung besteht in der Ermittlung der Konzentration des Punktes E' (Fig. 41c) als Endpunkt der Horizontalen $E'C'F'$ von höherer Temperatur aus. Dieser Punkt war bisher nur als Punkt der Kurve $E'O'$ von niederer Temperatur aus bestimmt worden[1]). Da beide Resultate hinreichende Übereinstimmung zeigen, so liegt darin eine Gewähr, daß auch die übrigen Punkte der Kurve $E'O'$ der Löslichkeit des elementaren Kohlenstoffs im festen Eisen, welche nur durch Erhitzungsversuche bestimmt werden konnten, Gleichgewichtswerte darstellen.

In den Punkt C' des Graphiteutektikums mündet die Kurve $C'D'$ der Ausscheidung des Graphits aus geschmolzenen Eisen-Kohlenstofflegierungen, in den Punkt C des Zementiteutektikums die Kurve CD der Ausscheidung des Zementits aus geschmolzenen Eisen-Kohlenstofflegierungen. Da C' bei höherer Temperatur als C liegt, so muß $C'D'$ wenigstens zum Teil oberhalb von CD verlaufen. Bezüglich des Verlaufes der beiden Kurvenäste nach höherer Temperatur hin gehen die Ansichten noch weit auseinander.

Schließlich sei noch erwähnt, daß die Kenntnis der wahren Schmelzpunkte des Graphit- und Zementiteutektikums die Beantwortung der viel diskutierten Frage der Bildung des Graphits oder genauer des Erstarrungsgraphits ermöglicht. Die meisten Metallurgen waren der Ansicht, daß bei der Erstarrung die Ausscheidung des Graphits nicht direkt aus der Schmelze, sondern durch nachträgliche Zersetzung schon ausgeschiedener Kristallarten erfolge. Eine genaue Bestimmung der eutektischen Erstarrungstemperatur grau erstarrten Roheisens ergab jedoch, daß die Schmelze der Ort der Graphitbildung ist und daß der kristallisierten Phase in dieser Hinsicht, wenn überhaupt, nur eine ganz untergeordnete Bedeutung zukommt. Hiernach hat sich die alte Regel, daß Roheisen immer zuerst weiß erstarrt, als nicht haltbar erwiesen.

(Eingegangen 3. April 1918.)

1) Ruer und Iljin, loc. cit.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Abteilungsvorsteher am Chemisch-technischen Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe Geh. Regierungsrat Dr. Adolf Lehne zum ord. Honorarprofessor daselbst.

Berufen: Der ord. Professor der Astronomie an der Universität Straßburg Dr. Julius Bauschinger in gleicher Eigenschaft an die Universität Leipzig.

Neuer Lehrauftrag: Oberrealschuldirektor Dr. Walter Lietzmann an der Universität Göttingen für Didaktik der exakten Wissenschaften.

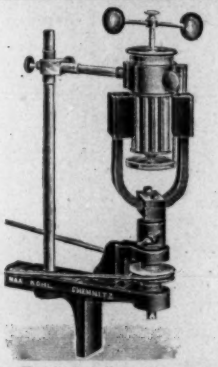
Vom Lehramt zurück: Der Direktor des Physikalischen Laboratoriums der Universität Toronto Professor Dr. John C. Mc Lennan.

Gestorben: Der Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam Geh. Regierungsrat Professor Dr Paul Kämpf, der ord. Professor der physiologischen Chemie an der Universität Leipzig Dr. Max Siegfried, der Begründer der Deutschen Chemischen Gesellschaft und des Vereins zur Wahrung der Interessen der chemischen Industrie Deutschlands Geheimrat Dr. Karl Alexander v. Martius (Aktiengesellschaft für Anilinfabrikation) in Berlin.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



52068. Modell eines Kurzschlussankers nach Friedr. C. G. Müller, für die Schwungmaschine.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren

Ölluftpumpen

Experimentier-Schalttafeln

Projektions-Apparate

Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Physikalische Werkstätten, G.m.b.H.

Göttingen 1 bauen als Sondererzeugnis

PHYWE

Sämtliche Apparate zur Einführung in das Gebiet der elektrischen Schwingungen sowie Demonstrations- und Spiegelgalvanometer

in einfachen, besonders preiswürdigen Ausführungsformen.

Man verlange Preisblätter.

Prismen, Linsen, Platten

aus

Kalkspat, Flußspat, Quarz, Steinsalz, Glas.

Gyps- und Glimmerpräparate.

Preisliste gratis.

R. Halle Nachfolger, Optisches Institut.

Berlin-Steglitz.

Въ современныхъ, новыхъ государства потребуются въ такихъ современныхъ, но общеизвѣстныхъ приборахъ какъ

Барреттеръ измерительный приборъ Гати для высокихъ напряженіе и для телефона.

Цѣна Руб. 250 —

Béla Gáti,

Budapest IX, Gyáli-ut. 22.

Inhaltsverzeichnis:

(B. — Besprechungen.)

Seite

Atmosphäre: Radioaktive Zerfallsprodukte in der freien — und die Wahrscheinlichkeit ihrer Herkunft von der Sonne, v. H. Bongards. (Vorläufige Mitteilung.) 141
Atomgewichte: Über eine neue periodische Beziehung zwischen den — der chemischen Elemente, v. K. Fehrle 162
Bergholm, C. u. Y. Björnståhl, Elektrische Doppelbrechung in Kolloiden. 137
Biologie: Die Lehre von den flüssigen Kristallen und ihre Beziehung zu den Problemen der —, v. O. Lehmann. (B.) 166
Björnståhl, Y. u. C. Bergholm, Elektrische Doppelbrechung in Kolloiden 137
Bongards, H., Radioaktive Zerfallsprodukte in der freien Atmosphäre und die Wahrscheinlichkeit ihrer Herkunft von der Sonne. (Vorläufige Mitteilung.) 141
Chemische Elemente: Über eine neue periodische Beziehung zwischen den Atomgewichten der —, v. K. Fehrle 162
— —: Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den —, v. K. Fajans. (B.) . . . 167
Dipolmoleküle: Elektronenring-Modell und elektrisches Moment einiger —, v. L. Schames 156
Elektronenring-Modell und elektrisches Moment einiger Dipolmoleküle, v. L. Schames 156
Fajans, K., Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den chemischen Elementen. (B.) 167
Fehrle, K., Über eine neue periodische Beziehung zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente 162
Gase: Über Abkühlung von — durch Leistung innerer und äußerer Arbeit, v. R. Plank 150
Gase: Bemerkung zur Ableitung der chemischen Konstanten mehratomiger — aus dem Planckschen Wahrscheinlichkeitsbegriff, v. L. Schames 158
Geometrische Verzeichnung: Beiträge zur — von Niveauflächen, v. O. Grotrian 145
Gewebe: Über den Einfluß normaler Kathodenstrahlen auf das lebende —, v. W. E. Pauli u. J. Grober 148
Grober, J., u. W. E. Pauli, Über den Einfluß normaler Kathodenstrahlen auf das lebende Gewebe . 148
Grotrian, O., Beiträge zur geometrischen Verzeichnung von Niveauflächen 145
Kathodenstrahlen: Über den Einfluß normaler — auf das lebende Gewebe, v. W. E. Pauli u. J. Grober 148
Kolloide: Elektrische Doppelbrechung in —, v. C. Bergholm u. Y. Björnståhl 137
Kolorimetrische Untersuchungen. V., v. O. Meißner 159
Kristalle: Die Lehre von den flüssigen — und ihre Beziehung zu den Problemen der Biologie, v. O. Lehmann. (B.) 166
Lehmann, O., Die Lehre von den flüssigen Kristallen und ihre Beziehung zu den Problemen der Biologie. (B.) 166
Meißner, O., Kolorimetrische Untersuchungen V. . 159
Meyer, St., Wie groß ist der Mond? (Briefkasten.) . 168
Mond: Wie groß ist der —? v. St. Meyer. (Briefkasten.) 168
Niveauflächen: Beiträge zur geometrischen Verzeichnung von —, v. O. Grotrian 145
Pauli, W. E., u. J. Grober, Über den Einfluß normaler Kathodenstrahlen auf das lebende Gewebe . 148
Peters, J., Siebenstellige Werte der trigonometrischen Funktionen von Tausendstel zu Tausendstel des Grades. (B.) 167
Planckscher Wahrscheinlichkeitsbegriff: Bemerkung zur Ableitung der chemischen Konstanten mehratomiger Gase aus dem —, v. L. Schames 158
Plank, R., Über Abkühlung von Gasen durch Leistung innerer und äußerer Arbeit 150
Radioaktive Zerfallsprodukte in der freien Atmosphäre und die Wahrscheinlichkeit ihrer Herkunft von der Sonne, v. H. Bongards. (Vorläufige Mitteilung.) 141
Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den chemischen Elementen, v. K. Fajans. (B.) 167
Schames, L., Elektronenring-Modell und elektrisches Moment einiger Dipolmoleküle 156
Schames, L., Bemerkung zur Ableitung der chemischen Konstanten mehratomiger Gase aus dem Planckschen Wahrscheinlichkeitsbegriff 158
Sonne: Radioaktive Zerfallsprodukte in der freien Atmosphäre und die Wahrscheinlichkeit ihrer Herkunft von der Sonne, v. H. Bongards. (Vorläufige Mitteilung.) 141
Trigonometrische Funktionen: Siebenstellige Werte der — von Tausendstel zu Tausendstel des Grades. (B.) 167

Richard Müller-Uri, Braunschweig, Schleinitzstr. 19

Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.

Neuheiten: **Coulombmeter** nach Stephan D.R.G.M. — Righis **Röhren für magnetische Strahlen** mit Vakuum-Regulierung D.R.G.M. — **Quecksilber-Schnellpumpe.** — **Präzisions-Vakuometer** D.R.G.M. — **Pizzarello-Apparat.** — **Apparate für flüssige Luft.** — **Verflüssigte Gase in Röhren.** — **Projektions- und Extrem-Thermometer.** — **Elektroskope** und **Trockensäulen.** — **Vakuumröhren** nach Braun, Crookes Geißler, Puluj, Lecher, Röntgen, Wehnelt. — **Leuchtschirme.** — **Normal-Geißlerröhren-Serie** „Kompendium". — **Original-Vakuumskalen** nach Croß.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.